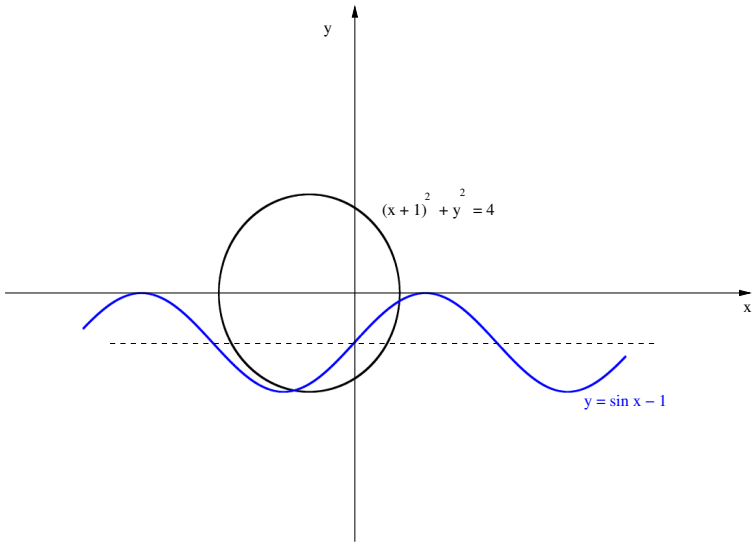
Numerická matematika A – 28.5.2015

A1. Zapíšeme si danou soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + y^2 &= 4 \\ \sin x \; - \; y &= 1 \end{aligned}$$

a) *Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.* Nejprve si načrtneme obrázek, z kterého vidíme přibližnou polohu kořenů (průsečíky obou křivek)



b) Dále zapíšeme rovnice tečných rovin ke grafu funkce f a g v bodě $A = [x_k, y_k]$

$$z = f(A) + f_x(A)(x - x_k) + f_y(A)(y - y_k), \tag{1}$$
$$z = g(A) + g_x(A)(x - x_k) + g_y(A)(y - y_k), \tag{2}$$

kde f_x, f_y, g_x, g_y jsou příslušné parciální derivace.

V rovnici $f(x, y) = 0$ nahradíme funkci příslušnou rovnicí tečné roviny (tedy v rovnici tečné roviny položíme $z = 0$). Vyjádříme x a y tak aby obě rovnice byly splněny (toto řešení označíme x_{k+1}, y_{k+1}.

$$-f(A) = f_x(A)(x_{k+1} - x_k) + f_y(A)(y_{k+1} - y_k), \tag{3}$$
$$-g(A) = g_x(A)(x_{k+1} - x_k) + g_y(A)(y_{k+1} - y_k). \tag{4}$$

Označíme $\Delta_x = x_{k+1} - x_k$ a $\Delta_y = y_{k+1} - y_k$, danou soustavu rovnic vyřešíme a následně spočteme

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

c) Volíme $\mathbf{X}^{(0)} = [0, 1]^T$. Pozor, zadané rovnice je nutné nejprve upravit odečtením pravé strany, tj.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x+1)^2 + y^2 - 4, \\ g(x, y) &= \sin x \; - \; y \; - 1. \end{aligned}$$

Dále si spočteme parciální derivace funkcí f a g, tedy

$$f_x = 2(x+1), \qquad f_y = 2y, \qquad g_x = \cos x, \qquad g_y = -1.$$

Tyto parciální derivace a funkce f, g vyčíslíme v bodě $\mathbf{X}^{(0)}$ a sestavíme soustavu lineárních rovnic (viz b)), tedy

$$\begin{aligned} -(1+1-4) &= 2\Delta_x + 2\Delta_y, & (5)\\ -(-1-1) &= 1\Delta_x - 1\Delta_y. & (6) \end{aligned}$$

nebo-li

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

tedy řešení je $\Delta_x = \frac{3}{2}$, $\Delta_y = -\frac{1}{2}$. Nové přiblížení (aproximace) tedy je

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = t \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$$

a) Odvození Eulerovy metody: Pro $y \in \mathcal{C}^2$ užijeme Tayl. polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku, tedy

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{y''(\xi)}{2!}h^2.$$

Dále užitím toho, že $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

v předchozím vztahu dostaneme ($x = x_n$)

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Označíme hodnoty aproximací $y_n \approx y(x_n)$, nahradíme v přechozí rovnici a zanedbáme $\mathcal{O}(h^2)$. Dostaneme vzorec pro explicitní Eulerovu metodu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

b) Sestavíme charakteristickou rovnici pro danou úlohu

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

a spočteme její kořeny (diskriminant $D = 4 - 20 = -16 < 0$ je záporný, kořeny jsou tedy komplexní)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

(reálný) Fundamentální systém je tedy tvořen funkcemi

$$e^{-t}\sin(2t), e^{-t}\cos(2t).$$

c) Volíme $h = 1$ a chceme určit hodnoty aproximace řešení $x(1)$ a $\dot{x}(1)$ užitím Collatzovy metody. Nejprve danou obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu přepíšeme jakou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, tj

$$\begin{array}{lllll} z_1 = x, & \dot{z}_1 & = & z_2, & z_1(0) = 1, \\ z_2 = \dot{x}, & \dot{z}_2 & = & t - 2z_2 - 5z_1, & z_2(0) = 0. \end{array}$$

Soustavu zapisujeme ve vektorovém tvaru pro $Z = (z_1, z_2)^T$, tedy

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ t - 2z_2 - 5z_1 \end{pmatrix}$$

nebo také

$$\dot{Z} = f(t, Z), \qquad \text{kde} \qquad f(t, Z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ t - 2z_2 - 5z_1 \end{pmatrix}.$$

Máme $t_0 = 0$, $h = 1$, $Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Užijeme Collatze:

$$\boldsymbol{k}_1 = f(t_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 - 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Dále

$$Z_{pom} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.5 \end{pmatrix}.$$

a tedy

$$\boldsymbol{k}_2 = f(t_0 + h/2, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.5 - 2 \cdot (-2.5) - 5 \cdot (1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Užijeme vzorec pro Collatzovu metodu ve tvaru

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Hodnota aproximace $Z^{(1)}$ udává aproximaci hodnot přesného řešení Z v bodě $t = 1$, tj.

$$Z(1) \approx \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dle užité substituce ale je $Z = (x, \dot{x})^T$, tedy hodnoty aproximací jsou dány jako $x(1) \approx -1.5$ a $\dot{x}(1) \approx 0.5$.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x, t] : x \in (-1, 1),\ t > 0\},$$

$$u(x, 0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1, t) = 0,\ u(1, t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) V případě implicitního schéma užijeme v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_{k+1}]$ náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_{i-1}^{k+1}) - 2u(P_i^{k+1} + u(P_{i+1}^{k+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2}.$$

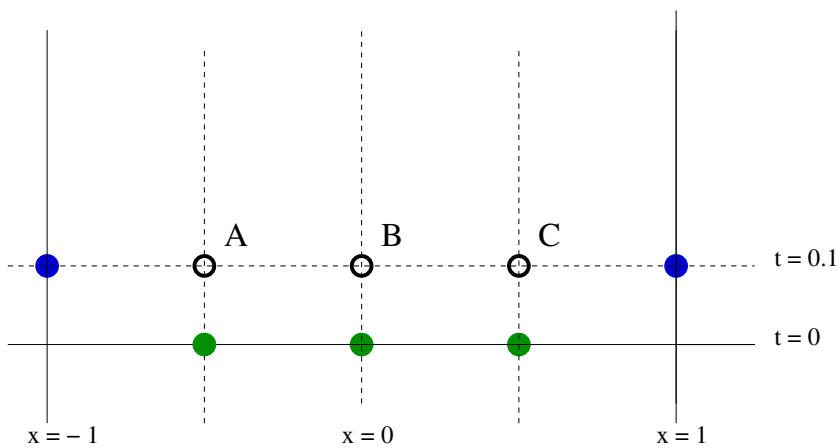
Použijeme tyto náhrady v rovnici a dostaneme

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 2\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + 4\,x_i.$$

Rovnici vynásobíme τ, označíme $\sigma = \frac{2\tau}{h^2}$ a upravíme

$$-\sigma\, U_{i+1}^{k+1} + (1+2\sigma)\, U_i^{k+1} - \sigma\, U_{i-1}^{k+1} = U_i^k + 4\tau\, x_i.$$

b) Volíme $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$, tedy $\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$. Nejprve si načrtneme síť v oblasti:



Sestavíme rovnice dle a), v uzlech na první časové vrstvě (označených v obrázku zelenou barvou) užijeme počáteční podmínku $(2x+2)$, v hraničních uzlech (modrá barva) užijeme okrajové podmínky (0 a $4-t$). Tedy

$$\begin{aligned}
-0.8\,(0) + 2.6\,U_A - 0.8\,U_B &= (2\cdot(-0.5)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(-0.5),\\
-0.8\,(U_A) + 2.6\,U_B - 0.8\,U_C &= (2\cdot(0.)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(0),\\
-0.8\,(U_B) + 2.6\,U_C - 0.8\,(4-0.1) &= (2\cdot(0.5)+2) + 0.1\cdot 4\cdot(0.5).
\end{aligned}$$

Soustavu rovnic upravíme a zapíšeme např. v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2 \\ 6.32 \end{pmatrix}.$$

c) Soustava rovnic je soustava se symetrickou pozitivně definitní maticí a také ostře diagonálně dominantní maticí. Vzhledem k tomu, že matice je ODD, tak je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

A4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x,t)$ takovou, že v oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (0,\pi),\ t \in (0,T)\}$ je splněna rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

a navíc jsou splněny počáteční a okrajové podmínky $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

a) Ověříme, zda je funkce $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$ řešením dané úlohy:

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = -4\pi^2 \sin(\pi x)\cos(2\pi t),$$

$$4\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = -4\pi^2 \sin(\pi x)\cos(2\pi t),$$

tedy

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 4\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + 0.$$

Tato funkce navíc splňuje jak počáteční podmínky

$$u(x,0) = \sin(\pi x)\cos(2\pi 0) = \sin(\pi x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\pi \sin(\pi x)\sin(2\pi 0) = 0$$

tak i okrajové podmínky

$$u(0,t) = \sin(\pi 0)\cos(2\pi t) = 0, \qquad u(1,t) = \sin(\pi)\cos(2\pi t) = 0.$$

b) Užijeme náhrady

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

dosadíme do vlnové rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = 4\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(P_i^k),$$

vynásobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{4\tau^2}{h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + (2 - 2\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(P_i^k).$$

Na první časové vrstvě: Dle Taylorova rozvoje máme na první časové vrstvě

$$U_i^1 \approx u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$$

a tedy po zanedbání $\mathcal{O}(\tau^2)$ a s využitím počátečních podmínek

$$U_i^1 = \sin(\pi x_i) + \tau \cdot 0.$$

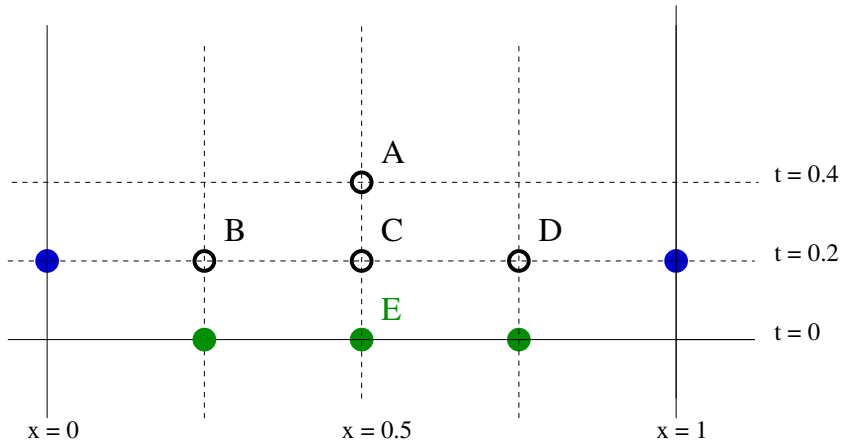
c) Podmínka stability explicitního schématu

$$\sigma \leq 1$$

Pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ a danou rovnici máme

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot 0.01}{0.25^2} = 64 \cdot 0.01 = 0.64.$$

Uvažujeme $f(x,t) = xt$, prostorový krok $h = 0.25$ a časový krok $\tau = 0.1$.



Počítáme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.5; 0.2]$.

$$U_A = 0.64U_B + 0.72U_C + 0.64U_D - \sin(0.5\,\pi) + 0.01(0.5 \cdot 0.1),$$

kde hodnoty v uzlech B, C, D leží v první časové vrstvě (viz b)), tedy

$$U_B = \sin(0.25\pi) + 0.2 \cdot 0 = \sqrt{2}/2,$$

$$U_C = \sin(0.5\,\pi) + 0.2 \cdot 0 = 1,$$

$$U_D = \sin(0.75\pi) + 0.2 \cdot 0 = \sqrt{2}/2.$$

Tedy po dosazení

$$U_A = 0.64 \cdot \sqrt{2}/2 + 0.72 \cdot 1 + 0.64 \cdot \sqrt{2}/2 - 1 + 0.01(0.5 \cdot 0.1) \doteq 0.6251 + 0.01 \cdot 0.05 = 0.6256.$$

Numerická matematika B – 28.5. 2015

B1.

x_i	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y_i	2.9	2.9	2.2	2	4	4.1	3.6	3.8

a) Z tabulky hodnot vypočteme

$$\sum_i 1 = 8, \qquad \sum_i x_i = 4, \qquad \sum_i x_i^2 = 12,$$

$$\sum_i y_i = 25.5, \qquad \sum_i x_i y_i = 17.1,$$

a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.5 \\ 17.1 \end{pmatrix}$$

b) Řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 25.5 \\ 4 & 12 & 17.1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 25.5 \\ 0 & 10 & 4.35 \end{array}\right)$$

Tedy dostaneme řešení $(2.97, 0.435)^T$, tj. koeficienty $a_0 = 2.97$ a $a_1 = 0.435$. Optimální polynom $p_1^*(x)$ je dán

$$p_1^*(x) = 2.97 + 0.435\,x.$$

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = 2e^{-y} - (y')^2, \qquad y(-3) = 1, \qquad y'(-3) = 1$$

a) Nejprve danou rovnici převedeme na soustavu rovnic prvního řádu, tedy

$$\begin{array}{l} Y_1 = y, \\ Y_2 = y', \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{l} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = 2e^{-Y_1} - (Y_2)^2, \end{array} \qquad \begin{array}{l} Y_1(-3) = 1, \\ Y_2(-3) = 1. \end{array}$$

nebo také $Y' = f(x, Y)$, kde

$$f(x, Y) = \begin{pmatrix} Y_2, \\ 2e^{-Y_1} - (Y_2)^2 \end{pmatrix}.$$

b) Volíme $h = 0.1$, $x_0 = -3$ a $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Počítáme explicitní Eulerovou metodou

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + hf(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^{-1} - 1^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.973 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(2)} = Y^{(1)} + hf(x_1, Y^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.973 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0.973 \\ 2e^{-1.1} - 0.973^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.1973 \\ 0.945 \end{pmatrix}$$

c) Volíme $h = 0.2$, $x_0 = -3$ a $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Počítáme Collatzovou metodou

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.264 \end{pmatrix}$$

$$Y_{pom} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2e^{-1} - 1^2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.973 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(-2.9, Y_{pom}) \doteq \begin{pmatrix} 0.973 \\ -0.281 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0.973 \\ -0.281 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.1947 \\ 0.94358 \end{pmatrix}$$

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

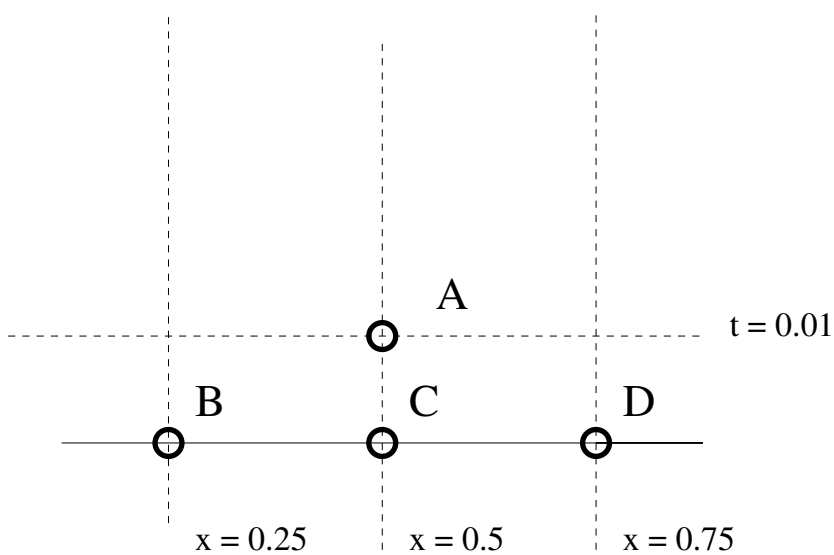
a) Podmínky souhlasu.

$$\begin{array}{rll} \text{Bod x = -1, t = 0:} & 2 \cdot (-1) + 2 = u(-1,0) = 0 & \text{(splněno)} \\ \text{Bod x = 1, t = 0:} & 2 \cdot (1) + 2 = u(1,0) = 4 - 0 & \text{(splněno)} \end{array}$$

b) Podmínka stability explicitního schématu:

$$\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 0.01}{0.25^2} = 2 \cdot 16 \cdot 0.01 = 0.32 \leq \frac{1}{2}.$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek



Přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5; 0.01]$ určíme explicitním schematem:

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + \tau f(C),$$

kde $U_B \approx u(0.25, 0)$, $U_C \approx u(0.5, 0)$, $U_D \approx u(0.75, 0)$ jsou hodnoty na první časové vrstvě dány počáteční podmínkou $(2x + 2)$. Tedy

$$U_A = 0.32 \cdot (2.5) + 0.36 \cdot (3) + 0.32 \cdot (3.5) + 0.01(4 \cdot 0.5) = 3.02$$

B4. Zabýváme se Dirichletovou okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(xy'\right)' + y = 4 \qquad y(1) = 0, y(4) = 0.$$

a) *Postačující podmínky pro Dirichletovu úlohu ve tvaru*

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

jsou:

(i) Spojitost funkcí p, p', q a f na intervalu $I = \langle a, b\rangle$.

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$.

Pro danou úlohu máme $p(x) = x$, $q(x) = 1$ a $f(x) = 4$, tedy **podmínka (i)**: spojitost funkcí **je splněna** (uvažujeme i spojitost $p'(x) = 1$) na libovolném intervalu, tedy i na uvažovaném intervalu $I = \langle 1, 4\rangle$.

Dále na tomto intervalu I navíc platí $p(x) = x > 0$ i $q(x) = 1 \geq 0$, tj. také **podmínka (ii) je splněna.**

Postačující **podmínky** pro existenci a jednoznačnost řešení dané úlohy **jsou** tedy **splněny**. *(Pozn. Dokonce nezávisle na volbě Sturmových okrajových podmínek ($q(x) > 0$), nejen pro uvažované Dirichletovy okrajové podmínky)*

b) Zapíšeme nejprve síťové rovnice pro krok $h = 1$ v uzlech $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$

$$\begin{aligned} -1.5\,y_0 + (1.5 + 2.5 + 1^2 \cdot 1)\,y_1 - 2.5\,y_2 &= 1^2 \cdot 4, \\ -2.5\,y_1 + (2.5 + 3.5 + 1^2 \cdot 1)\,y_2 - 3.5\,y_3 &= 1^2 \cdot 4, \end{aligned}$$

kde jsme vyčíslily hodnoty funkce $p(x) = x$ v uzlech $x_{1/2} = 1.5$, $x_{1+1/2} = 2.5$ a $x_{2+1/2} = 3.5$ a dosadili jsme hodnoty $y_0 = y(1) = 0$ a $y_3 = y(4) = 0$ z okrajových podmínek. Tedy

$$\begin{aligned} 5y_1 - 2.5y_2 &= 4, \\ -2.5y_1 + 7y_2 &= 4, \end{aligned}$$

c) Matice soustavy je ostře diagonálně dominantní(ODD) tak i symetrická a pozitivně definitní (SPD). Pro Jacobiovu metodu je ODD postačující pro konvergenci, tedy Jacobiova metoda bude konvergentní.