Numerická matematika A – 27.5.2016

A1. Dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) Nejprve symetrická a zároveň pozitivně definitní (SPD): Matice není symetrická (Zdůvodnění: prvek $a_{23} = 1 \neq -1 = a_{32}$, nebo také $A^T \neq A$), tedy nemůže být/ **není SPD**.

NAVÍC POZOR: v případě nesymetrické matice není možné ověřovat pozitivní definitnost výpočtem subdeterminantů (hlavních minorů), tento postup (Sylvestrovo kritérium) je použitelný **jen pro symetrické matice**!

Ostře diagonálně dominantní: Např. v 1. řádku požadovaná nerovnost ($|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$) neplatí, tj. neplatí nerovnost $2 > 1 + |-1|$. Ve sloupci obdobně pro 1. sloupec. Matice tedy **není ODD**.

b) Je pro danou matici A Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte!

Postačující podmínky (viz a)) pro konvergenci Gauss-Seidelovy iterační metody nejsou splněny. Vyšetříme tedy nutnou a postačující podmínku, tj. $\rho(U_{GS}) < 1$. Spektrální poloměr počítáme pomocí vlastních čísel matice U_{GS}, což jsou také kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = -\lambda(-8\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

tj. $\lambda_1 = 0$ a

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{-16} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{16} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{33}{256}}.$$

Spektrální poloměr $\rho(U_{GS}) = \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{33}{256}} < 1$.

Nutná a postačující podmínka ($\rho(U_{GS}) < 1$) konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody je splněna, **metoda pro danou soustavu je konvergentní.**

c) Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i-tou složku z i-té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 - x_3 &= 5 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 3 \\ -1x_1 - 1x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(5 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(3 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (5, 3, 1)$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = (1.5, 0.25, 1.375)^T.$$

A2. Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -2y, \quad y(0) = D$.

a) Pro $y \in \mathcal{C}^2$ užijeme Tayl. polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku, tedy

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \underbrace{\frac{y''(\xi)}{2!}h^2}_{\mathcal{O}(h^2)}.$$

Vyjádříme

$$\frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) = y'(x)$$

Dále užitím toho, že $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

v předchozím vztahu dostaneme (pro $x = x_{n+1}$)

$$y(x_n) - y(x_{n-1}) = hf(x_n, y(x_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Označíme hodnoty aproximací $y_n \approx y(x_n)$, nahradíme v přechozí rovnici a zanedbáme $\mathcal{O}(h^2)$. Dostaneme vzorec pro implicitní Eulerovu metodu

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)$$

nebo také

$$y_n - hf(x_n, y_n) = y_{n-1}.$$

b) Užitím implicitní Eulerovy metody:

Obdobně jako v b) počítáme implicitní Eulerovou metodou (hodnoty aproximací označme z_i, $z_0 = D$, $x_0 = 0$, $h > 0$, $y_0 = D > 0$). Vidíme, že

$$z_1 - hf(x_1, z_1) = z_0, \qquad \rightarrow (1+2h)z_1 = z_0,$$

a tedy

$$z_1 = (1+2h)^{-1}D.$$

Obdobně dostaneme vztah pro

$$(1+2h)z_2 = z_1$$

a tedy

$$z_2 = (1+2h)^{-2}D.$$

Obecně

$$z_n = \frac{1}{(1+2h)^n}D.$$

c) Řešme temto příklad pomocí explicitní Eulerovy metody. Dle zadání vidíme, že $x_0 = 0$, $h > 0$, $y_0 = D > 0$. Pravá strana diferenciální rovnice je $f(x, y) = -2y$.

Hodnotu v bodě x_1 tedy spočteme dle vzorce z a)

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = (1-2h)y_0 = (1-2h)D,$$

a dále obdobně

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = (1-2h)y_1 = (1-2h)^2 D,$$

a

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = (1-2h)y_2 = (1-2h)^3 D.$$

Vidíme, že

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = (1-2h)y_{n-1}$$

a obecně tedy máme

$$y_n = (1-2h)^n D.$$

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = -x + 3y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[1.7;0]$, $[0;1.5]$, $[1.5;1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = x - 2y$.

a) Dle Taylorova rozvoje máme

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\, y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h\, y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

Sečtením obou rovností pro dostáváme vztah

$$y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h) = h^2 y''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

z kterého $y''(x_i)$ již vyjádříme.

b)

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dále dle a) dostáváme v bodě $P_{i,j} = [x_i, y_j]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

a obdobně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{ij}) \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2},$$

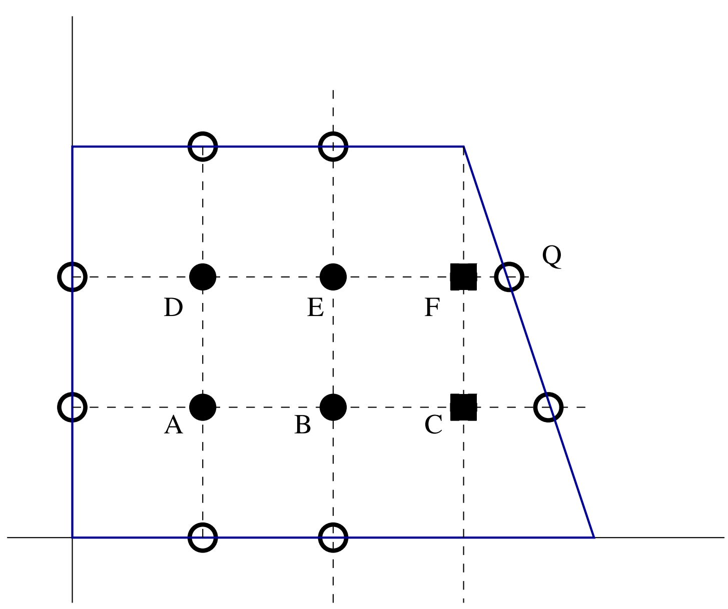
kde U_{ij} jsou hodnoty aproximací řešení $u(P_{i,j})$, tj. $U_{i,j} \approx u(P_{i,j})$. Dosazením těchto vyjádření do vyjádření $\triangle u$ v regulárním uzlu $P_{i,j}$ dostáváme

$$h^2 \triangle u|_{P_{i,j}} \approx U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j}$$

a tedy náhradu rovnice $-\triangle u = f$ v regulárním uzlu ($f_{i,j} = f(P_{i,j})$)

$$-U_{i+1,j} - U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j} = f_{i,j}.$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Sestavíme rovnice na přímce $y = 1$ postupně zleva do prava, v hraničních uzlech rovnou dosazujeme Dirichletovu okrajovou podmínku $(x + y)$, tedy nejprve v regulárních uzlech

$$\begin{aligned} 4U_D - U_E - U_A - (0 - 2 \cdot 1) - (0.5 - 2 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot (-0.5 + 3 \cdot 1), \\ 4U_E - U_D - U_F - U_B - (1 - 2 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot (-1 + 3 \cdot 1), \end{aligned}$$

a následně v uzlu F - neregulárním užijeme náhrady $(1 + \delta)U_N - \delta U_R = \varphi(Q)$, kde δ získáme ze souřadnic hraničního uzlu $Q = [\frac{47}{30}; 1]$, tj. $\delta = 2/15$. Tedy

$$(1 + \frac{2}{15})U_F - \frac{2}{15}U_E = \frac{47}{30} - 2 \cdot 1.$$

A4. V oblasti $Q_T = \{[x, t] : x \in (1, 5),\ t \in (0, T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x + 2t, \qquad u(x, 0) = x, \quad u(1, t) = 1 + 3t, \quad u(5, t) = 2t + 5,$$

a) Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

kde opět $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$. Dosadíme do dané rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 0.5\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + (x_i + 2t_k),$$

kterou vynásobíme τ, označíme $\sigma = 0.5\tau/h^2$ a upravíme:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau(x_i + 2t_k).$$

Podmínka stability je $\sigma \le \frac{1}{2}$.

b) Nejprve podmínky souhlasu

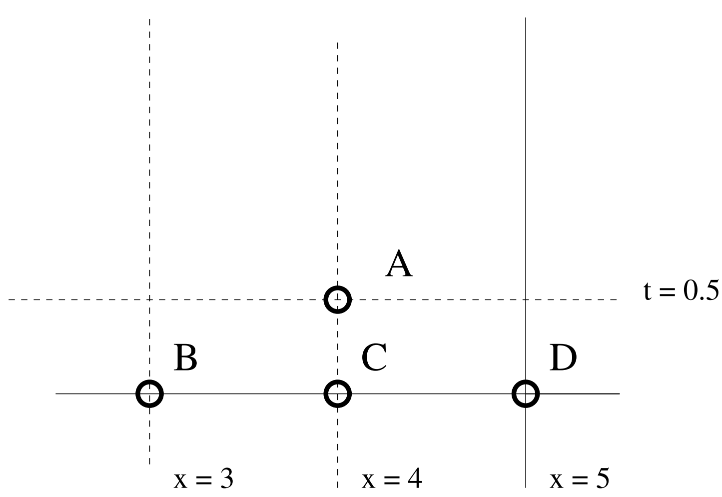
V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna: $1 = 1 + 3 \cdot 0$,

V bodě x = 5, t = 0 je podmínka splněna: $5 = 2 \cdot 0 + 5$.

Následně ověříme, zda schéma je stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$, tedy

$$\sigma = \frac{0.5 \cdot 0.5}{1^2} = 0.25 \le \frac{1}{2}$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Pro $h = 1$ a $\tau = 0.5$ je $\sigma = 0.25$, tedy počítáme

$$U_A = 0.25U_B + 0.5U_C + 0.25U_D + 0.5 \cdot (-4 + 0),$$

kde hodnoty U_B, U_C, U_D jsou hodnoty na nulté časové vrstvě, tj. jsou dány počáteční podmínkou (x).

$$U_B = 3, \quad U_C = 4, \quad U_D = 5.$$

Tedy hodnota U_A

$$U_A = 2 + 2 + 0.5 \cdot (-4 + 0) = 2.$$

Numerická matematika B – 27.5.2016

B1.

a) Matice je ostře diagonálně dominantní (pro řádky ne, neboť v druhém řádku neplatí $2 > 1 + |-1|$).
Ve sloupcích ale ano:

$$\begin{array}{lrcl} \text{1. sloupec} & 5 & > & 1+1 \\ \text{2. sloupec} & 2 & > & 1+0 \\ \text{3. sloupec} & 4 & > & |-2|+|-1| \end{array}$$

Matice není symetrická, tedy není SPD (pozitivní definitnost již tedy nevyšetřujeme).

b) Gauss-Seidelova metoda je konvergentní, neboť dle a) je matice ODD.

Iterace počítáme dle

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 1\cdot x_2^k + 2\cdot x_3^k\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - 1\cdot x_1^{k+1} + 1\cdot x_3^k\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - x_1^k\right) \end{aligned}$$

Tedy z počáteční iterace $X^{(0)} = B$ dostaneme iteraci $X^{(1)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \rightarrow \qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

c)

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.9 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \qquad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = 2.2.$$

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(2)$.

a) rovnice je lineární, dané funkce jsou spojité všude, tedy $I = (-\infty, \infty)$

b) Výpočet Collatz:

$$t_0 = 0, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h = 1$$

$$\boldsymbol{k}_1 = f(0, X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\ 0, 0\ \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(0.5, X_{pom}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

B3.

a) Nejprve podmínky souhlasu

$$\text{V bodě x = -1, t = 0 je podmínka splněna:} \qquad 2 \cdot (-1) + 2 = 0,$$

$$\text{V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna:} \qquad 2 \cdot 1 + 2 = 4 - 0.$$

b) Explicitní schéma je dáno vzorcem:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$$

Podmínka stability

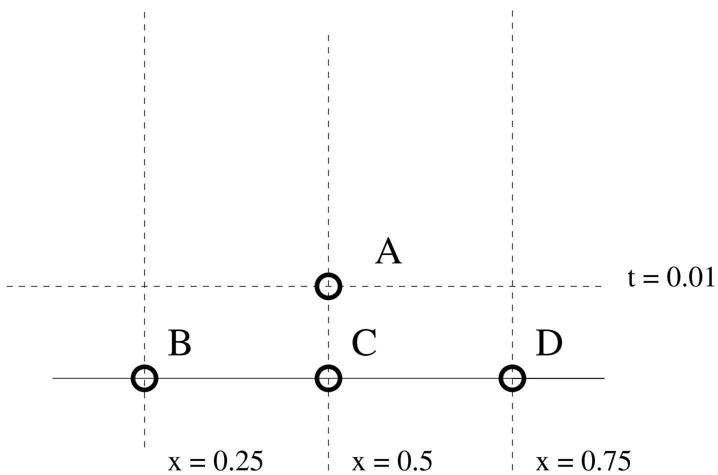
$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

v našem případě

$$\sigma = \frac{2 \cdot 0.01}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16 \cdot 0.02 = 0.32 \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy explicitní schéma je stabilní.

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Hodnotu v bodě A počítáme dle vzorce

$$U_A = 0.32(U_B + U_D) + 0.36 U_C + 0.01 f(C),$$

kde hodnoty v bodech B, C, D nulté časové vrstvy jsou dány počáteční podmínkou $(2x + 2)$, tedy

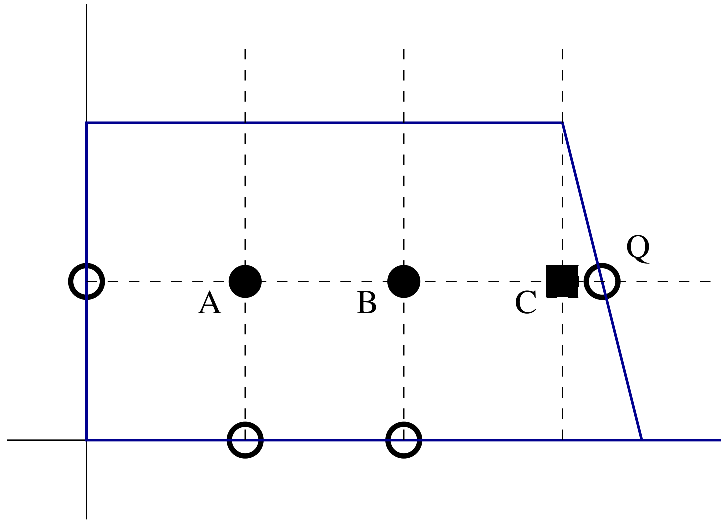
$$\begin{aligned} U_B &= 2 \cdot 0.25 + 2 = 2.5, \\ U_C &= 2 \cdot 0.5 + 2 = 3, \\ U_D &= 2 \cdot 0.75 + 2 = 3.5. \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$U_A = 0.32(2.5 + 3.5) + 0.36 \cdot 3 + 0.01 \cdot 4 \cdot 0.5 = 1.92 + 1.08 + 0.02 = 3.02.$$

B4.

a) Nejprve si nakreslíme obrázek:



$$\begin{array}{rl} \text{regulární:} & A = [1,1], \quad B = [2,1], \\ \text{neregulární:} & C = [3,1], \\ \text{hraniční:} & Q = [3.25, 1], P = [0,1] \end{array}$$

b) Nejprve sestavíme rovnice v regulárních uzlech (okrajová podmínka $2 - x$, pravá strana $2x + y$)

$$\begin{aligned} 4U_A - U_B - (2-0) - (2-1) - (2-1) &= 1^2(2 \cdot 1 + 1), \\ 4U_B - U_A - U_C - (2-2) - (2-2) &= 1^2(2 \cdot 2 + 1), \end{aligned}$$

a dále pak v uzlech neregulárních

$$1.25U_C - 0.25U_B = (2 - 3.25).$$