Numerická matematika A – 25.6.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a) Zapište (obecnou) matici A jako součet diagonální matice D, ostře dolní trojúhelníkové matice L a ostře horní trojúhelníkové matice P, tedy $A = L + D + P$. Zapište Jacobiho iterační metodu ve tvaru prosté iterační metody $X^{(n+1)} = U_J X^{(n)} + V$ a pomocí L, D, P a B vyjádřete matici U_J a vektor V.

b) Ukažte, že pro libovolnou ostře diagonálně dominantní (po řádkách) matici A je řádková norma příslušné matice $||U_J||_\infty$ menší než 1.

c) Rozhodněte, zda je pro danou matici A Jacobiho iterační metoda konvergentní. Zdůvodněte.

d) Volte $X^{(0)} = B$ a vypočítejte $X^{(1)}$ Jacobiho iterační metodou. Určete řádkovou a sloupcovou normu rozdílu vektorů $X^{(0)}$ a $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' + yy'' + 1 - (y')^2 = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

a) Danou rovnici převeďte na soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

b) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $y(0.2)$ a $y'(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla implicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Ověřte podmínky souhlasu pro danou úlohu. Volte prostorový krok $h = 0.5$ a časový krok $\tau = 0.1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu.

c) Rozhodněte, zda je Jacobiho iterační metoda pro soustavu rovnic z b) konvergentní.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

v oblasti Ω ve tvaru čtyřúhelníka $ABCD$, kde $A = [0,0]$, $B = [3,0]$, $C = [2,3]$ a $D = [0,3]$ s okrajovou podmínkou $u(x,y) = 1$ na hranici $\partial\Omega$.

a) Volte krok $h = 1$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Síť načrtněte a vyznačte regulární a neregulární uzly.

b) Pomocí lineární interpolace sestavte vzorec pro náhradu řešení v neregulárním uzlu.

c) Sestavte soustavu síťových rovnic a rozhodněte, zda bude pro tuto soustavu konvergovat Jacobiho iterační metoda.

Numerická matematika B – 25.6.2015

B1. Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje data zadaná tabulkou hodnot:

x_i	0	1	1	2
y_i	0	1	2	2

a) Zapište v maticovém zápisu soustavu rovnic pro určení koeficientů hledaného polynomu.

b) Zapište řešení soustavy a výsledný polynom.

c) Vypočtěte hodnotu tohoto v bodě $x = 1$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(1)$.

B3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x+1)y = -2, \quad y(1) = 1,\ y(3) = 0$$

a) Zapište podmínky, které jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.5$. Zjistěte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.

B4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt,$$

$$u(x,0) = x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x \text{ pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ a } u(0,t) = t,\ u(1,t) = 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.2$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.4]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).