NMA Varianta **A**

1. Je dána soustava lineárních rovnic $\vec{x} = \boldsymbol{U}\vec{x} + \vec{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.45 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že pro libovolnou matici $\boldsymbol{U} \in R^{n\times n}$ platí nerovnost $\rho(\boldsymbol{U}) \leq ||\boldsymbol{U}||$, kde $\rho(\boldsymbol{U})$ je spektrální poloměr matice $\boldsymbol{U}$.

b) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro zadanou soustavu konvergentní. V kladném případě spočítejte první dvě iterace při volbě $x^{(0)} = \vec{0}$.

c) Užitím vzorce

$$||\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}|| \leq \frac{||\boldsymbol{U}||^k}{1 - ||\boldsymbol{U}||}||\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}||$$

odhadněte chybu $||\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(2)}||_1$, kde $\boldsymbol{x}^*$ je přesné řešení zadané soustavy rovnic.

2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + 2y' + 5y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

a) Užitím Taylorova rozvoje dokažte, že platí vzorec

$$y'(x + h/2) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h^2).$$

b) Zadanou rovnici druhého řádu převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

c) Zvolte krok $h = 1$ a určete přibližnou hodnotu $y'(1)$ pomocí Collatzovy metody.

3. Je dána okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-(2y')' + xy = 2x - 1, \quad y(1) = -2, \quad y(3) = 1$$

a) Ověřte, zda jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.

b) Sestavte soustavu rovnic, která vznikne diskretizací dané úlohy na síti s krokem $h = 0.5$.

c) Zapište vzniklou soustavu rovnic v maticovém tvaru a rozhodněte, zda ji lze řešit pomocí Jacobiho iterační metody.

4. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x$$

s počáteční podmínkou $u(x, 0) = 2x + 2$ pro $x \in< -1, 1 >$ a okrajovými podmínkami $u(-1, t) = 0$, $u(1, t) = 4 - t$ pro $t \geq 0$.

a) Ověřte, že jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Zapište, jak se nahradí parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{n+1} při řešení rovnice vedení tepla pomocí implicitního schématu. Toto schéma odvoďte!

c) Volte prostorový krok $h = 0.5$ a časový krok $\tau = 0.1$ a sestavte síťové rovnice pro řešení úlohy v první časové vrstvě pomocí implicitní metody. Lze výslednou soustavu rovnic řešit pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody? (odpověď zdůvodněte)

NMA Varianta **B**

1. Je dána soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že danou soustavu rovnic lze řešit Jacobiho iterační metodou.

b) Zvolte $x^{(0)} = \vec{b}$ a spočítejte první iteraci pomocí Jacobiho metody.

c) Spočítejte řádkovou normu $||\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}||_\infty$.

2. Je dána Cauchyova úloha

$$Y' = AY, \quad Y(0) = Y_0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Určete spektrální poloměr matice A.

b) Zvolte krok $h = 0.1$ a určete přibližnou hodnotu řešení $Y(0.2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

3. Je dána Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = 4$$

na oblasti $\Omega = \{[x, y] \in E_2 : 0 < x < 1.5,\ 0 < y < 1.5\}$, kde na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x, y) = 2xy$.

a) Nakreslete zadanou oblast a síť s krokem $h = 0.5$. Dále napište počet regulárních a neregulárních uzlů sítě a tyto vyznačte v obrázku oblasti.

b) Sestavte síťové rovnice, které vzniknou diskretizací dané úlohy pomocí metody sítí s krokem $h = 0.5$.

c) Zapište vzniklou soustavu rovnic v maticovém tvaru a rozhodněte, zda ji lze řešit Jacobiho, nebo Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - 2t,$$

počáteční podmínky $u(x, 0) = x$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2$, $x \in < 0, 1 >$
a okrajové podmínky $u(0, t) = 0$ a $u(1, t) = t + 1$, $t \geq 0$.

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Volte prostorový krok $h = 0.2$, časový krok $\tau = 0.1$ a ověřte, zda je splněna podmínka stability pro explicitní metodu.

c) Vypočítejte přibližnou hodnotu řešení $u(0.4, 0.2)$ pomocí explicitní metody s kroky h a τ z bodu b). Pro výpočet hodnot v první časové vrstvě použijte náhradu druhého řádu.