Numerická matematika A – 22.6.2017

A1.

a) Vyjádřete kvadratickou odchylku $\delta^2(p_2(x))$ obecného polynomu $p_2(x)$ nejvýše 2. stupně od tabulky hodnot x_i, y_i. Jakou podmínku má splňovat optimální polynom $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně, který aproximuje danou tabulku hodnot nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců? (princip metody nejmenších čtverců).

b) Užijte předchozího označení a zapište podmínky, ze kterých se odvodí soustava normálních rovnic pro polynom p_2^*. Tuto soustavu odvoďte!

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot. Soustavu vyřešte a určete polynom nejvýše 2. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců.

x_i	-2	-1	-1	1	1	2
y_i	5	2	0	0	2	3

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' + yy'' + 2 - (y')^3 = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

a) Danou rovnici převeďte na soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

b) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $y(0.2)$ a $y'(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x,t)$ takovou, že platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t,$$

a jsou splněny počáteční a okrajové podmínky $\quad u(x,0) = (2+x)(2-x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ pro $x \in \langle -2, 2\rangle$,
$u(-2,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0 \qquad$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v regulárním uzlu P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Volte krok $h = 1$, časový krok $\tau = 0.3$ a nakreslete síť. Ověřte, zda je pro tuto volbu explicitní schéma stabilní! Určete hodnoty aproximací ve všech uzlech sítě na nulté a první časové vrstvě.

c) Užitím explicitního schématu určete přibližnou hodnotu v bodech $A = [1, 0.6]$.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-\left((x-1)y'\right)' + (x-2)\,y = -1 \qquad y(2) = 1, y(6) = 2.$$

a) Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h/2)-z(x-h/2)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm h/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady.
Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru.

b) Ověřte, že existuje právě jedno řešení dané úlohy. Uveďte všechny podmínky, které jste ověřili!

c) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro danou úlohu.

Numerická matematika B – 2.6.2016

B1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-2	-1	-1	1	1	2
y_i	5	2	0	0	2	3

a) Pro danou tabulku hodnot sestavte soustavu normálních rovnic pro určení koeficientů polynomu nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců. Soustavu rovnic zapište v maticovém tvaru.

b) Soustavu z a) vyřešte a určete polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje zadaná data.

c) Vypočtěte $p_1^*(1)$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = 2\frac{y}{x}, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 1,$$

a) Určete interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y(-1)$ a $y'(-1)$.

B3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \qquad u(x,0) = 10x - 4, \quad u(0,t) = t - 4, \quad u(1,t) = \frac{6}{1+t}, \quad x \in \langle 0,1\rangle, t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Uveďte podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.02]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = 1$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1.5,0], [1,1.5], [0,1.5]$, kde na hranici je předpsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2y$.

a) Nakreslete oblast a síť s krokem $h = 0.5$ v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 0.5$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.