Numerická matematika A – 22.5.2015

A1.

a) Vlastní čísla λ_k matice $\boldsymbol{U}_J$ se počítají jako kořeny rovnice $\det(L+\lambda D+U)=0$, neboť jak snadno ověříme platí

$$\det(\boldsymbol{U}_J-\lambda\boldsymbol{E})=\det(-D^{-1}(L+U)-\lambda D^{-1}D)=\det(-D^{-1})\det((L+U+\lambda D).$$

Spektrální poloměr pak je největší absolutní hodnota ze všech těchto vlastních čísel, $\rho(\boldsymbol{U}_J)=\max|\lambda_k|$.

b) A je ODD pokud buď pro všechna i platí $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}a_{ij}$ nebo pro všechna i platí $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}a_{ji}$. Daná matice není ODD, neboť v druhém řádku/sloupci požadovaná nerovnost není splněna.

c) Nejprve rozhodneme, zda je Jacobiova metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Postačující podmínka vzhledem k b) není splněna, zjistíme tedy, zda je splněna nutná a postačující podmínka: $\rho(\boldsymbol{U}_J)<1$. Vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}_J$ počítáme postupem dle a). Tedy

$$\det\begin{pmatrix}4\lambda & -2 & 0\\ 1 & 2\lambda & 1\\ 0 & 1 & 4\lambda\end{pmatrix}=32\lambda^3-4\lambda+8\lambda=0$$

Kořeny jsou $\lambda_1=0$, a komplexní $\lambda_{2,3}$ v absolutní hodnotě splňují $|\lambda_{2,3}|=\sqrt{\frac{1}{8}}<1$, tedy $\rho(\boldsymbol{U}_J)<1$. Tedy Jacobiova metoda je konvergentní neboť nutná a postačující podmínka pro její konvergenci je splněna.

Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i-tou složku z i-té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned}4x_1-2x_2+0x_3 &= 2\\ 1x_1+2x_2+1x_3 &= -2\\ 0x_1+x_2+4x_3 &= 1\end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(2+2x_2^{(k)}-0x_3^{(k)}\right),\\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(-2-2x_1^{(k)}-1x_3^{(k)}\right),\\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(1-0x_1^{(k)}-1x_2^{(k)}\right).\end{aligned}$$

Volíme $X^0=(2,-2,1)$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1=(-\frac{1}{2},-\frac{5}{2},\frac{3}{4})^T.$$

A2.

a) Ze vztahu daném v zadání vyjádříme $y(x+h)$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x+h/2) + h\mathcal{O}(h^2),$$

kde použijeme předpoklad, že funkce $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tedy

$$y'(x+h/2) = f(x+h/2, y(x+h/2)),$$

a kam dosadíme za $y(x+h/2)$ dle Taylora rozvoje

$$y(x+h/2) \approx y(x) + \frac{h}{2}y'(x) = y(x) + \frac{h}{2}f(x,y(x)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Tedy pro $x = x_n$, $y(x_n) \approx y_n$ a zanedbáním $\mathcal{O}(h^2)$ dostaneme jednokrokovou Collatzovu metodu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2f(x_n, y_n)).$$

b) $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_0 = 0$, $h = 1$,

$$\boldsymbol{k}_1 = f(t_0, X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}_2 = AX_{pom} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ získáme jako řešení charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 + 16 = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$$

tedy řešíme kvadratickou rovnici se záporným diskriminantem $D = 16 - 80 = -64$ a dostaneme komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{64}}{2} = -2 \pm 4i.$$

Reálný fundamentální systém dané ODR pak získáme jako reálnou a imaginární část z

$$e^{(-2+4i)t}\boldsymbol{V} = e^{-2t}(\cos(4t) + i\sin(4t))\boldsymbol{V},$$

kde $\boldsymbol{V}$ je konstantní (komplexní) vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $-2+4i$. Vidíme, že řešení závisí na čase pomocí funkcí sin a cos s frekvencí $f = 4/(2\pi) = 2/\pi$ a tedy periodou $T = 1/f = \pi/2 \approx 1.57$. Krok $h = 1$ je tedy vzhledem k velikosti periody rozhodně příliš velký.

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = 2x + y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[2;0]$, $[0;1.5]$, $[1.5;1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$.

a) Dle Taylorova rozvoje máme

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h\,y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

Sečtením obou rovností pro dostáváme vztah

$$y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h) = h^2 y''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

z kterého $y''(x_i)$ již vyjádříme.

b)

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dále dle a) dostáváme v bodě $P_{i,j} = [x_i, y_j]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

a obdobně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{ij}) \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2},$$

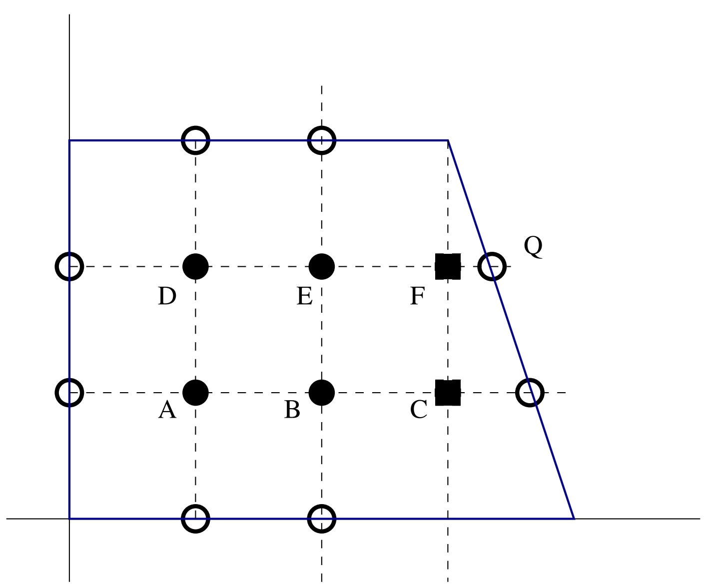
kde U_{ij} jsou hodnoty aproximací řešení $u(P_{i,j})$, tj. $U_{i,j} \approx u(P_{i,j})$. Dosazením těchto vyjádření do vyjádření $\triangle u$ v regulárním uzlu $P_{i,j}$ dostáváme

$$h^2 \triangle u|_{P_{i,j}} \approx U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j}$$

a tedy náhradu rovnice $-\triangle u = f$ v regulárním uzlu ($f_{i,j} = f(P_{i,j})$)

$$-U_{i+1,j} - U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j} = f_{i,j}.$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Sestavíme rovnice na přímce $y = 1$ postupně zleva do prava, v hraničních uzlech rovnou dosazujeme Dirichletovu okrajovou podmínku $(x + y)$, tedy nejprve v regulárních uzlech

$$\begin{aligned} 4U_D - U_E - U_A - (0+1) - (0.5+1.5) &= 0.5^2 \cdot (2 \cdot 0.5 + 1), \\ 4U_E - U_D - U_F - U_B - (1+1.5) &= 0.5^2 \cdot (2 \cdot 1 + 1), \end{aligned}$$

a následně v uzlu F - neregulárním užijeme náhrady $(1+\delta)U_N - \delta U_R = \varphi(Q)$, kde δ získáme ze souřadnic hraničního uzlu $Q = [1.5 + \frac{1}{3}h; 1]$, tj. $\delta = 1/3$. Tedy

$$(1 + \frac{1}{3})U_F - \frac{1}{3}U_E = (1.5 + \frac{1}{6}) + 1.$$

A4. V oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (1,5),\ t \in (0,T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \qquad u(x,0) = 4x, \quad u(1,t) = 4 + 3t, \quad u(5,t) = 2t + 20,$$

a) Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

kde opět $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$. Dosadíme do dané rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 0.5\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + (x_i + 2t_k),$$

kterou vynásobíme τ, označíme $\sigma = 0.5\tau/h^2$ a upravíme:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau(x_i + 2t_k).$$

Podmínka stability je $\sigma \leq \frac{1}{2}$.

b) Nejprve podmínky souhlasu

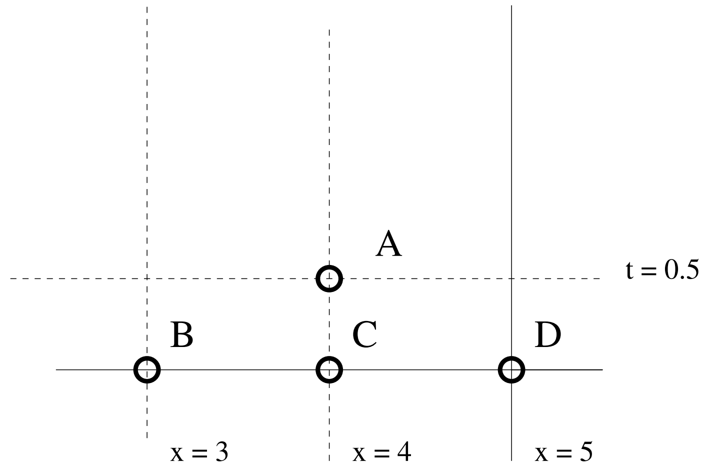
V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna: $4 \cdot 1 = 4 + 3 \cdot 0$,

V bodě x = 5, t = 0 je podmínka splněna: $4 \cdot 5 = 2 \cdot 0 + 20$.

Následně ověříme, zda schéma je stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$, tedy

$$\sigma = \frac{0.5 \cdot 0.5}{1^2} = 0.25 \leq \frac{1}{2}$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Pro $h = 1$ a $\tau = 0.5$ je $\sigma = 0.25$, tedy počítáme

$$U_A = 0.25U_B + 0.5U_C + 0.25U_D + 0.5 \cdot (4 + 0),$$

kde hodnoty U_B, U_C, U_D jsou hodnoty na první časové vrstvě, tj. jsou dány počáteční podmínkou $(4x)$.

$$U_B = 4 \cdot 3 = 12, \quad U_C = 4 \cdot 4 = 16, \quad U_D = 4 \cdot 5 = 10.$$

Tedy hodnota U_A

$$U_A = 8 + 8 + 0.5 \cdot (4 + 0) = 18.$$

Numerická matematika B – 22.5. 2015

B1.

a) Matice je ostře diagonálně dominantní (pro řádky ne, neboť v druhém řádku neplatí $2 > |-1| + |-2|$).
Ve sloupcích ano:

$$\begin{array}{lccc} \text{1. sloupec} & 5 & > & 1+|-2| \\ \text{2. sloupec} & 3 & > & 1+|-1| \\ \text{3. sloupec} & 2 & > & 0+1 \end{array}$$

b) Matice není symetrická, pozitivní definitnost již nevyšetřujeme.

c) Gauss-Seidelova metoda je konvergentní, neboť dle a) je matice ODD.

Iterace počítáme dle

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 1\cdot x_2^k - 1\cdot x_3^k\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(1 - 1\cdot x_1^{k+1} - 0\cdot x_3^k\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(-1 + 2\cdot x_1^k + 1\cdot x_2^k\right) \end{aligned}$$

Tedy z počáteční iterace $X^{(0)} = B$ dostaneme iteraci $X^{(1)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \rightarrow \qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B2.

a) rovnice je lineární, dané funkce jsou spojité všude, tedy $I = (-\infty, \infty)$

b) Výpočet Collatz:

$$t_0 = 0, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h = 1$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\boldsymbol{k}_2 = f(t_0 + h/2, X_{pom}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{1}{2} + 1 \\ 2 - 4\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B3.

a) Nejprve podmínky souhlasu

V bodě x = -1, t = 0 je podmínka splněna: $2\cdot(-1) + 2 = 0,$

V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna: $2\cdot 1 + 2 = 4 - 0.$

b) Explicitní schéma je dáno vzorcem:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$$

Podmínka stability

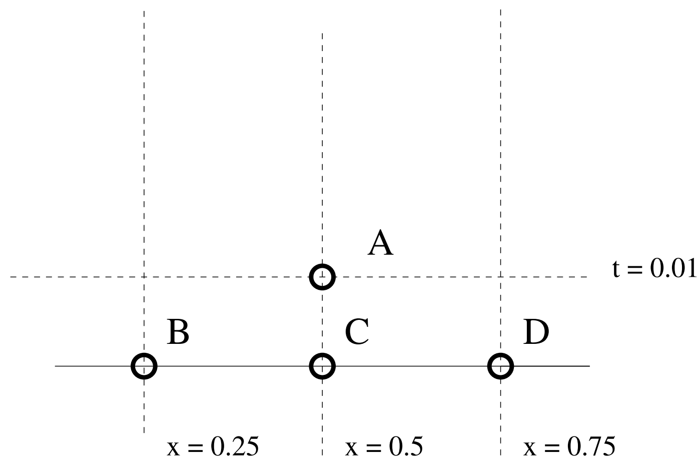
$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

v našem případě

$$\sigma = \frac{2 \cdot 0.01}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16 \cdot 0.02 = 0.32 \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy explicitní schéma je stabilní.

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Hodnotu v bodě A počítáme dle vzorce

$$U_A = 0.32(U_B + U_D) + 0.36U_C + 0.01f(C),$$

kde hodnoty v bodech B, C, D nulté časové vrstvy jsou dány počáteční podmínkou $(2x+2)$, tedy

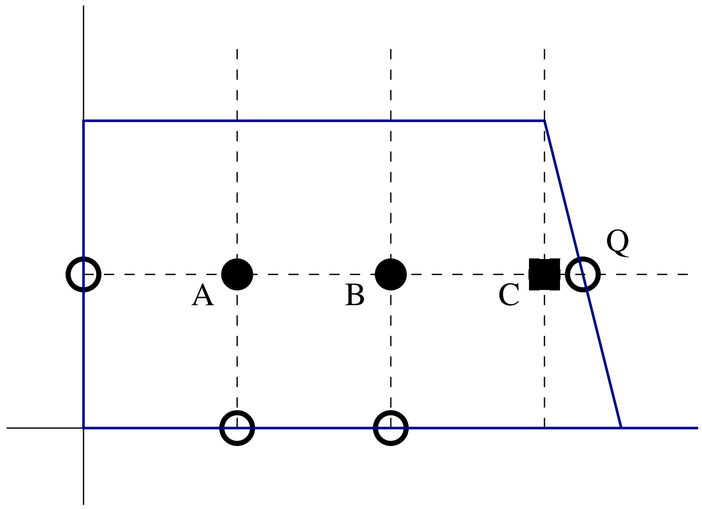
$$\begin{aligned} U_B &= 2 \cdot 0.25 + 2 = 2.5, \\ U_C &= 2 \cdot 0.5 + 2 = 3, \\ U_D &= 2 \cdot 0.75 + 2 = 3.5. \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$U_A = 0.32(2.5 + 3.5) + 0.36 \cdot 3 + 0.01 \cdot 4 \cdot 0.5 = 1.92 + 1.08 + 0.02 = 3.02.$$

B4.

a) Nejprve si nakreslíme obrázek:



$$
\begin{array}{rl}
\text{regulární:} & A=[1,1], \quad B=[2,1], \\
\text{neregulární:} & C=[3,1], \\
\text{hraniční:} & Q=[3.25,1], P=[0,1]
\end{array}
$$

b) Nejprve sestavíme rovnice v regulárních uzlech (okrajová podmínka $2-x$, pravá strana $2x+y$)

$$
\begin{aligned}
4U_A - U_B - (2-0) - (2-1) - (2-1) &= 1^2(2\cdot 1+1), \\
4U_B - U_A - U_C - (2-2) - (2-2) &= 1^2(2\cdot 2+1),
\end{aligned}
$$

a dále pak v uzlech neregulárních

$$1.25U_C - 0.25U_B = (2-3.25).$$