Numerická matematika A – 18.6.2015

A1.

a) Vyjádřete kvadratickou odchylku $\delta^2(p_1(x))$ obecného polynomu $p_1(x)$ nejvýše 1. stupně od tabulky hodnot x_i, y_i. Uveďte, jakou podmínku má splňovat optimální polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který aproximuje danou tabulku hodnot nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

b) Užijte předchozího označení a zapište podmínky, ze kterých se odvodí soustava normálních rovnic pro polynom p_1^*. Tuto soustavu odvoďte!

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot. Soustavu vyřešte a určete polynom nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

x_i	-1	0	1	2	2
yi	-1.6	0	1.3	2.9	2.7

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = y' - \sqrt{\frac{y}{x^2-1}}, \quad y(2) = 3, \ y'(2) = 5$$

a) Zapište, v jaké oblasti jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Uveďte všechny podmínky, které ověřujete!

b) Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Volte $h = 2$ a určete přibližnou hodnotu $y(4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x,t)$ takovou, že platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t,$$

a jsou splněny počáteční a okrajové podmínky $u(x,0) = x(4-x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ pro $x \in \langle 0,4\rangle$, $u(0,t) = 0$, $u(4,t) = 0$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v regulárním uzlu P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Volte krok $h = 1$, časový krok $\tau = 0.3$ a nakreslete síť. Ověřte, zda je pro tuto volbu explicitní schéma stabilní! Určete hodnoty aproximací ve všech uzlech sítě na nulté a první časové vrstvě.

c) Užitím explicitního schématu určete přibližnou hodnotu v bodech $A = [1, 0.6]$ a $B = [2, 0.6]$.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x-1)\,y = 4 \qquad y(1) = 2, y(5) = 0.$$

a) Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h)-z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro $h := \tilde{h}/2$ a výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm \tilde{h}/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady.
Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru.

b) Ověřte, že existuje právě jedno řešení dané úlohy. Uveďte všechny podmínky, které jste ověřili!

c) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro danou úlohu.

Numerická matematika B – 18.6. 2015

B1. Je dána soustava rovnic $X = \mathbb{U}X + V$, kde

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ -0.6 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

b) V kladném případě určete první a druhé přiblížení $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = \mathbf{0}$.

c) Určete spektrální poloměr matice $\mathbb{U}$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' = 3y'' - 3y' + y, \; y(-3) = 1, \; y'(-3) = 1, \; y''(-3) = 1$$

a) Zadanou diferenciální rovnici převeďte na soustavu rovnic $\mathrm{Y}' = F(x, \mathrm{Y})$.

b) Volte krok $h = 0.1$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v boě $x = -2.8$ Eulerovou explicitní metodou.

c) Volte krok $h = 0.2$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v boě $x = -2.8$ Collatzovou metodou.

B3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \qquad u(x,0) = 10x - 4, \quad u(0,t) = t - 4, \quad u(1,t) = \frac{6}{1+t},$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Uveďte podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = x - y$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1.5,0], [1,1.5], [0,1.5]$, kde na hranici je předpsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2y$.

a) Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.