Numerická matematika A – 16.06.2016

A1.

a) Vlastní čísla λ_k matice $\boldsymbol{U}_J$ se počítají jako kořeny rovnice $\det(L + \lambda D + U) = 0$, neboť jak snadno ověříme platí

$$\det(\boldsymbol{U}_J - \lambda \boldsymbol{E}) = \det(-D^{-1}(L+U) - \lambda D^{-1} D) = \det(-D^{-1}) \det((L + U + \lambda D).$$

Spektrální poloměr pak je největší absolutní hodnota ze všech těchto vlastních čísel, $\rho(\boldsymbol{U}_J) = \max |\lambda_k|$.

b) A je ODD pokud buď pro všechna i platí $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} a_{ij}$ nebo pro všechna i platí $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} a_{ji}$. Daná matice není ODD, neboť např. v druhém řádku/sloupci požadovaná nerovnost není splněna.

c) Nejprve rozhodneme, zda je Jacobiova metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Postačující podmínka vzhledem k b) není splněna, zjistíme tedy, zda je splněna nutná a postačující podmínka: $\rho(\boldsymbol{U}_J) < 1$. Vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}_J$ počítáme postupem dle a). Tedy

$$\det \begin{pmatrix} 3\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix} = 24\lambda^3 - 2\lambda + 8\lambda = 0$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, a komplexní $\lambda_{2,3}$ v absolutní hodnotě splňují $|\lambda_{2,3}| = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$, tedy $\rho(\boldsymbol{U}_J) < 1$. Tedy Jacobiova metoda je konvergentní neboť nutná a postačující podmínka pro její konvergenci je splněna.

Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i-tou složku z i-té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 1x_1 + 0x_2 + 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(1 - 1x_2^{(k)} - 1x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 + 2x_1^{(k)} + 0x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(-3 - 1x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (1, 1, -3)$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = (1, \frac{3}{2}, -1)^T.$$

A2.

a) Ze vztahu daném v zadání vyjádříme $y(x+h)$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x + h/2) + h\mathcal{O}(h^2),$$

kde použijeme předpoklad, že funkce $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tedy

$$y'(x + h/2) = f(x + h/2, y(x + h/2)),$$

a kam dosadíme za $y(x+h/2)$ dle Taylora rozvoje

$$y(x+h/2) \approx y(x) + \frac{h}{2}y'(x) = y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Tedy pro $x = x_n$, $y(x_n) \approx y_n$ a zanedbáním $\mathcal{O}(h^2)$ dostaneme jednokrokovou Collatzovu metodu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2f(x_n, y_n)).$$

b) $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_0 = 0$, $h = 1$,

$$\boldsymbol{k}_1 = f(t_0, X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, X_{pom}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$X^{(1)} = X^{(0)} + 1\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -5.5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A3. Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2t$, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0 \qquad u(1, t) = 1 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Podmínky souhlasu vysvětlíme např. takto: V bodech, které leží v nulté časové vrstvě ($t = 0$) a zároveň na okraji intervalu (zde $x = 0$ a $x = 1$), máme předepsánu jak okrajovou tak počáteční podmínku. Tyto podmínky by se měly shodovat, aby úloha byla korekrně formulovaná (a vůbec připouštěla řešitelnost).

$$\text{V bodě x} = 0,\ \text{t} = 0 \text{ je podmínka splněna:} \quad 0 = 0^2,$$

$$\text{V bodě x} = 0,\ \text{t} = 0 \text{ je podmínka splněna:} \quad 1 = 1^2.$$

b) *Zapište jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem:*

Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

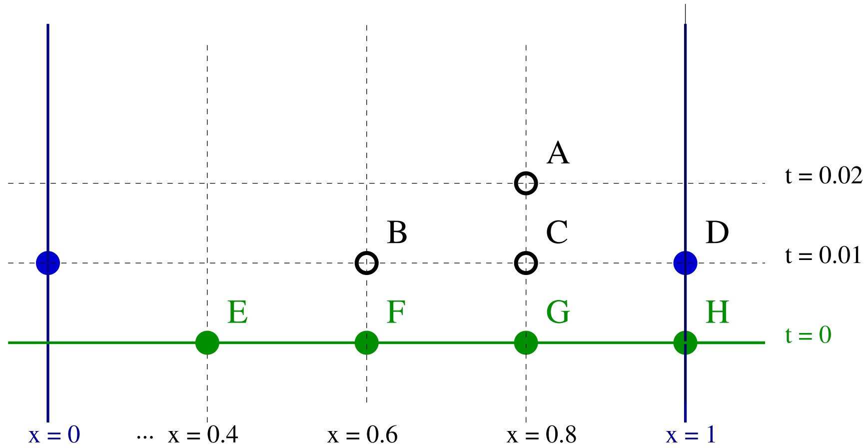
kde $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$.

c) *Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.2 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.8; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.*

Pro danou volbu spočteme nejprve hodnotu σ, tedy

$$\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 0.01}{0.2^2} = 0.5 \leq \frac{1}{2},$$

(podmínka stability je splněna). Načrtneme si obrázek sítě:



Hodnotu v bodě A pak spočteme dle explicitního schematu

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + 0.01 f(C).$$

Hodnoty U_B, U_C jsou hodnoty aproximací v bodech na první časové vrstvě a $U_D = 1$ je hodnota daná okrajovou podmínkou. Spočteme tedy nejprve hodnoty na 1. časové vrstvě:

$$\begin{aligned} U_B &= 0.5(0.4^2) + 0.0(0.6^2) + 0.5(0.8^2) + 0.01 \cdot f(0.6, 0) = 0.4, \\ U_C &= 0.5(0.6^2) + 0.9(0.8^2) + 0.5(1) + 0.01 \cdot f(0.8, 0) = 0.68, \end{aligned}$$

kde jsme rovnou dosadili příslušné hodnoty z nulté časové vrstvy v bodech E, F, G, H. Dopočteme hodnotu aproximace v bodě A

$$U_A = 0.5(0.4) + 0.0(0.68) + 0.5(1) + 0.01(-2 \cdot 0.01) = 0.6998$$

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = xy$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[1.8; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = y$.

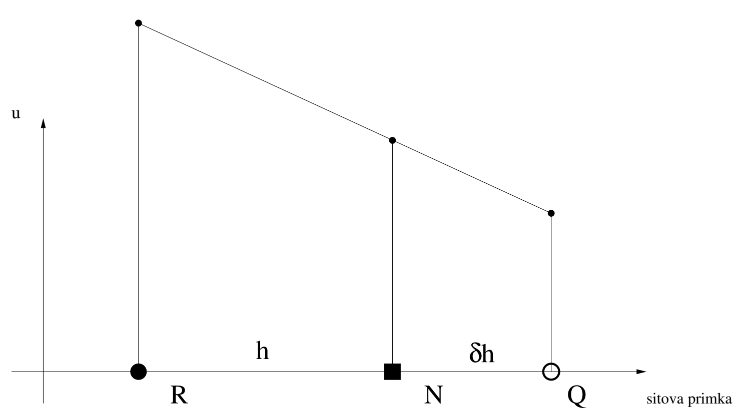
a) *Pomocí parciálních derivací rozepište symbol Δ. Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj. $-\Delta u$ pomocí druhých parciálních derivací.*
Symbol (Δ) je diferenciálním operátorem který je (ve 2D) dán jako

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

což je Laplaceův operátor. Tedy máme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) *Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.* Nejprve si nakreslíme schema pro neregulární uzel a sousední regulární uzel



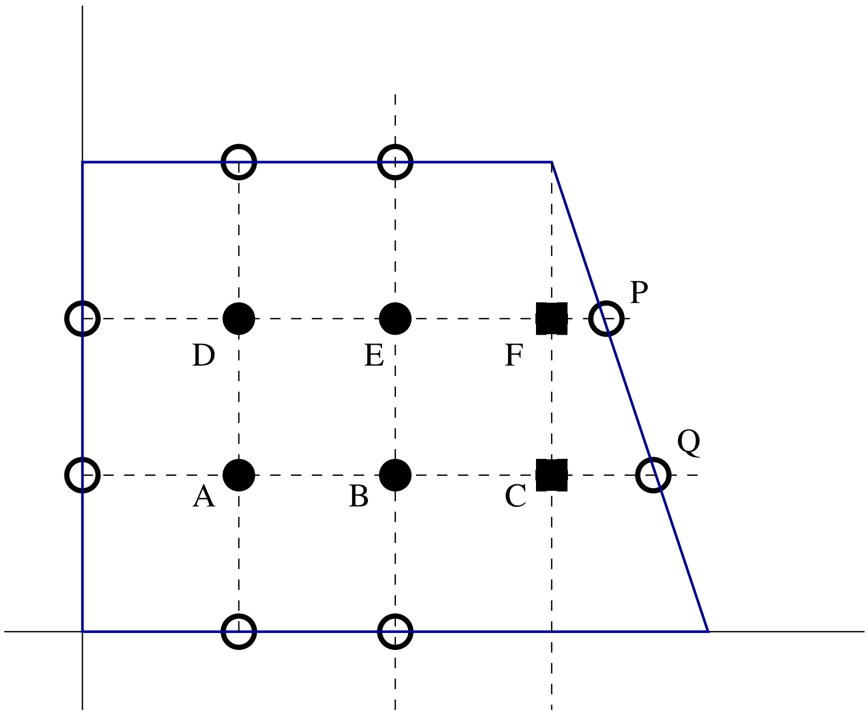
následně pak z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{U_N - U_R}{h} = \frac{\varphi(Q) - U_R}{(1+\delta)h},$$

a tedy po úpravě

$$\varphi(Q) = (1+\delta)U_N - \delta U_R.$$

d) *Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.*



Rovnice v regulárních uzlech

$$\begin{aligned}
4U_A - U_B - U_D - (0) - (0.5) &= 0.5^2(0.5 \cdot 0.5),\\
4U_B - U_A - U_C - U_E - (0) &= 0.5^2(1 \cdot 0.5),\\
4U_D - U_A - U_E - (1) - (1.5) &= 0.5^2(0.5 \cdot 1),\\
4U_E - U_D - U_B - U_F - (1.5) &= 0.5^2(1 \cdot 1),
\end{aligned}$$

a pak v uzlech neregulárních

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{2}{5})U_C - \frac{2}{5}U_B &= 0.5,\\
(1 + \frac{1}{5})U_F - \frac{1}{5}U_E &= 1,
\end{aligned}$$

Numerická matematika B – 16.06.2016

B1.

a) Ano, protože:

$$\|\mathbb{U}\|_E = \sqrt{0.96}$$

b)

$$X^{(1)} = V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.6 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.7 \end{pmatrix}$$

c)

$$\rho(\mathbb{U}) = 0.5$$

neboť charak. rovnice

$$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{0.8 \pm \sqrt{-0.04}}{2} = 0.4 \pm 0.3\, i,$$

tedy

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{0.16 + 0.09} = 0.5$$

B2.

a) rovnice je lineární, dané funkce jsou spojité všude, tedy $I = (-\infty, \infty)$

b) Výpočet Collatz:

$$t_0 = 0, \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h = 2$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\boldsymbol{k}_2 = f(t_0 + h/2, X_{pom}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1 \\ 2 - 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{pom} = X^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 1 \\ 2 - 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

B3.

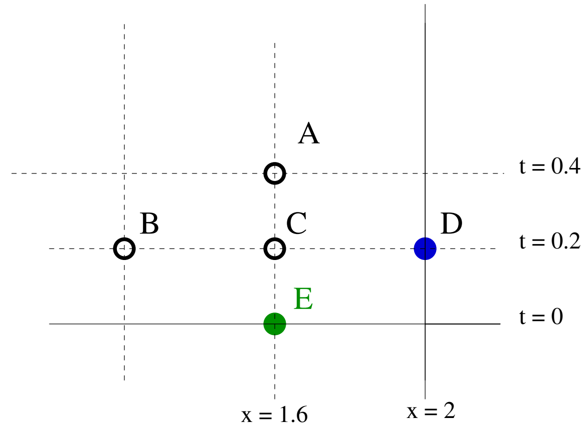
a) *Podmínky souhlasu:*

	Poloha (u),	**Rychlost** (u_t)
Bod $x = 0, t = 0$:	$0 \cdot (0-2) = \sin(0)$,	$1 - \frac{0^2}{4} = \cos(0)$
Bod $x = 2, t = 0$:	$2 \cdot (2-2) = 0$,	$1 - \frac{2^2}{4} = 0$

b) *Podmínka stability pro $h = 0.4$ a $\tau = 0.2$:*

$$\sigma^2 = \frac{4\tau^2}{h^2} = \frac{4 \cdot 0.04}{0.16} = 1 \le 1.$$

c) Nakreslíme si obrázek:



Hodnota $U_E = -1.6 \cdot 0.4 = -0.64$ je dána počáteční podmínkou (nultá vrstva) a hodnota $U_D = 0$ je dána okrajovou podmínkou. Hodnoty na první časové vrstvě spočteme (náhrada na 1. časové vrstvě)

$$U_B = 1.2 \cdot (1.2 - 2) + 0.2 \cdot (1 - \frac{1.2^2}{4}) = -0.96 + 0.128 = -0.832.$$

$$U_C = 1.6 \cdot (1.6 - 2) + 0.2 \cdot (1 - \frac{1.6^2}{4}) = -0.64 + 0.072 = -0.568.$$

Určíme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.2]$.

$$U_A = \sigma^2 U_B + (2 - 2\sigma^2) U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f(C),$$

tedy

$$U_A = 1 \cdot (-0.832) + 0 \cdot (-0.568) + 1 \cdot (0) - (-0.64) + 0.04 \cdot (1.6) = -0.128.$$

B4.

$$-\left(x^2 y'\right)' + (x+2)y = -x \qquad y(-1) = 1, y(3) = 1.$$

a) Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení jsou:

Podmínka I. Funkce p, p', q, f jsou spojité, tj. $p, p', q, f \in \mathcal{C}(\langle -1, 3\rangle)$.

Podmínka II. Funkce $p(x) > 0, q(x) \geq 0$ v intervalu $\langle -1, 3\rangle$.

Pro danou úlohu máme $p(x) = x^2$, $q(x) = x + 2$, a $f(x) = -x$. Vidíme, že podmínky I. a II. jsou splněny, existuje tedy právě jedno řešení dané úlohy.

b) Rovnice zapíšeme v uzlech $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, dle vzorce tedy máme

$$\begin{aligned}
-0.25 \cdot \underbrace{1}_{y_0} + (0.25 + 0.25 + 1^2(0+1))y_1 - 0.25y_2 &= 0,\\
-0.25y_1 + (0.25 + 2.25 + 1^2(1+1))y_2 - 2.25y_3 &= -1,\\
-2.25y_2 + (2.25 + 6.25 + 1^2(2+1))y_3 - 6.25 \cdot \underbrace{1}_{y_4} &= -2.
\end{aligned}$$

Hodnoty $y_0 = 1$ a $y_4 = 1$ jsou dány okrajovou podmínkou. Dosadíme a dostáváme v maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 4.5 & -2.25 \\ 0 & -2.25 & 11.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -1 \\ 4.25 \end{pmatrix}.$$

Snadno ukážeme, že matice této soustavy je ODD (např. v řádcích), tj.

$$11.5 > 0.25, \qquad 4.5 > 0.25 + 2.25, \qquad 11.5 > 2.25.$$