Numerická matematika A – 16.06.2016

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

a) Zapište vztah, ze kterého lze spočítat vlastní čísla (a spektrálního poloměr) Jacobiho iterační matice $\boldsymbol{U}_J = -D^{-1}(L+U)$, aniž bychom prvky matice $\boldsymbol{U}_J$ přímo počítali ($A = D + L + U$). Dokažte, že daný vztah skutečně dává vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}_J$.

b) Zapište jaké vztahy definují pojem ostře diagonálně dominantní matice. Rozhodněte, zda daná matice A je ostře diagonálně dominantní.

c) Rozhodněte, zda je Jacobiova metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní. Zapište, jakou podmínku pro konvergenci jste použili, a zdůvodněte, proč je splněna. Volte počáteční přiblížení $x^{(0)} = b$ a spočtěte přiblížení $x^{(1)}$ Jacobiovou iterační metodou.

A2. Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX + B(t)$, $X(0) = (1,0)^T$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište interval existence maximálního řešení dané úlohy.

b) Odvoďte vzorec pro Collatzovu metodu pro řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x,y)$. Návod: Užijte vztah $y'(x+h/2) = (y(x+h) - y(x))/h + \mathcal{O}(h^2)$ v bodě $x = x_i$ (pro $y'(x+h/2)$ využijte předpoklad, že y je řešením Cauchyovy úlohy, užijte Taylorův rozvoj a členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte).

c) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{(1)}$ v čase $t = 1$, tedy $X^{(1)} \approx X(1)$ pomocí Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2t,$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0;1 \rangle$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, t_k]$ při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

c) Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.2 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.8; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = xy$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[1.8;0]$, $[0;1.5]$, $[1.5;1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x,y) = y$.

a) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol (Δ). Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj. $-\Delta u$ pomocí druhých parciálních derivací.

b) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.

Numerická matematika B – 16.06.2016

B1. Je dána soustava rovnic $X = \mathbb{U}X + V$, kde

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.6 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

b) V kladném případě určete první a druhé přiblížení $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = \mathbf{0}$.

c) Určete spektrální poloměr matice $\mathbb{U}$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2-4t \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 2$ spočítejte přibližnou hodnotu řešení $X(2)$.

B3. V oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (0,2),\ t > 0\}$ je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

$$u(x,0) = x(x-2),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - \frac{x^2}{4},\ u(0,t) = \sin(t),\ u(2,t) = 0.$$

a) Ověřte, zda jsou pro danou úlohu splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro $h = 0.4$ a $\tau = 0.2$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[1.6, 0.4]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(x^2 y'\right)' + (x+2)y = -x \qquad y(-1) = 1, \quad y(3) = 1.$$

a) Zapište jaké podmínky jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro danou úlohu a krok $h = 1$. Rozhodněte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.