NMA A 15.6.2017

A1. Dána soustava lineárních rovnic $Ax = b$ kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Definujte pojem pozitivně definitní matice.

b) Rozhodněte, zda pro danou soustavu bude konvergovat Jacobiho metoda.

c) Rozhodněte, zda pro danou soustavu bude konvergovat Gauss–Seidlova metoda.

d) Volte $X^{(0)} = (4, 2, 2)^T$ a spočítejte $X^{(1)}$ oběma metodami.

A2. Dána Cauchyho úloha $y'' + 5y' = 0 \qquad y(0) = 2, y'(0) = -5$

a) Ukažte, že funkce $y(x) = A + Be^{-5x}$ je přesné řešení dané rovnice. Najděte přesné řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Volte $h = 1$ a spočítejte aproximaci $y^{(1)}, y^{(2)}$ explicitní Eulerovou metodou.

c) Volte $h = 1$ a spočítejte aproximaci $y^{(1)}$ implicitní Eulerovou metodou.

d) Určete chybu metody (akumulovanou diskretizační chybu) v bodě $x = 1$ pro krok $h = 1$ pro pro obě metody.

A3. Dána Dirichletova úloha $\Delta u = xy$ na čtyřúhelníku s vrcholy [0;0],[0;3],[-2,3],[-3;0], $u(x, y) = x + y$ na hranici oblasti.

a) Sestavte síťové rovnice, které dostanete při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

b) Ukažte, že při vhodném pořadí rovnic lze výslednou soustavu řešit Jacobiho metodou.

c) Dokažte, že pro $u \in C^4(I), I = \langle a, b\rangle$ je druhá centrální diference náhradou u'' druhého řádu přesnosti.

A4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (t + x)\ ,$$

$$\begin{array}{ll} u(x, 0) = 4x & \text{pro } x \in < 1, 5 >, \\ u(1, t) = 2t + 4, \quad u(5, t) = t + 20 & \text{pro } t \in < 0, 10 > . \end{array}$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu pro danou smíšenou úlohu.

b) Lze pro řešení dané úlohy explicitní metodou použít prostorový krok $h = 1/2$ a časový $\tau = 1$? Lze jej použít pro řešení imlicitní metodou?

c) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ na k-té časové vrstvě dopřednou a zpětnou diferencí prvního řádu. Alespoň jednu z těchto náhrad odvoďte.

d) Pro $h = 1$ a $\tau = 1$ spočtěte aproximaci řešení v bodě A[4,2] explicitním schematem.

NMA B 15.6.2017

B1. Je dána soustava rovnic $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.4 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte řádkovou a sloupcovou normu dané matice.

b) Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu rovnic konvergentní.

c) Určete $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ při volbě $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$.

B2. Dána Cauchyova úloha

$$y' = xy + \frac{2}{x+1} \qquad y(0) = 0$$

a) Zapište interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Spočtěte aproximaci $y(2)$ Eulerovou metodou s krokem $h = 1$.

c) Spočtěte aproximaci $y(2)$ Collatzovou metodou s krokem $h = 2$.

B3. Je dána okrajová úloha $-((x+0.5)y')' + x^2 y = x$, $y(0) = 5$, $y(4) = 1$

a) Zjistěte, zda daná Dirichletova úloha má právě jedno řešení. Zapište podmínky, které jste ověřovali.

b) Pro krok $h = 1$, sestavte soustavu rovnic pro řešení dané úlohy metodou sítí.

c) Lze vzniklou soustavu řešit Jacobiho iterační metodou? Pokud ano, volte $X^{(0)} = (1,2,3)^T$ s spočítejte $X^{(1)}$.

B4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2t+1)x \ ,$$

$$\begin{aligned} &u(x,0) = x - 1 \quad \text{pro } x \in < -2, 2 >, \\ &u(-2,t) = -3, \quad u(2,t) = \tfrac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0. \end{aligned}$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmíky souhlasu.

b) Volte krok $h = 1$ a τ maximální tak, aby bod $A = [1;1]$ byl uzlem sítě a explicitní schema bylo stabilní.

c) Spočtěte hodnotu $u(A)$ explicitním schematem.