Numerická matematika A – 11.6.2015

A1. Dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Nejprve symetrická a zároveň pozitivně definitní (SPD): Matice není symetrická (Zdůvodnění: prvek $a_{13} = -1 \neq 1 = a_{31}$, nebo také $A^T \neq A$), tedy nemůže být/ **není SPD**.

NAVÍC POZOR: v případě nesymetrické matice není možné ověřovat pozitivní definitnost výpočtem subdeterminantů (hlavních minorů), tento postup (Sylvestrovo kritérium) je použitelný **jen pro symetrické matice**!

Ostře diagonálně dominantní: Např. v 1. řádku požadovaná nerovnost ($|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$) neplatí, tj. neplatí nerovnost $2 > 1 + |-1|$. Ve sloupci obdobně pro 1. sloupec. Matice tedy **není ODD**.

b) Je pro danou matici A Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte!

Postačující podmínky (viz a)) pro konvergenci Gauss-Seidelovy iterační metody nejsou splněny. Vyšetříme tedy nutnou a postačující podmínku, tj. $\rho(U_{GS}) < 1$. Spektrální poloměr počítáme pomocí vlastních čísel matice U_{GS}, což jsou také kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(-8\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

tj. $\lambda_1 = 0$ a

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{-16} = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{16} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{33}{256}}.$$

Spektrální poloměr $\rho(U_{GS}) = \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{33}{256}} < 1$.

Nutná a postačující podmínka ($\rho(U_{GS}) < 1$) konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody je splněna, **metoda pro danou soustavu je konvergentní.**

c) Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i-tou složku z i-té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 - x_3 &= 5 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(5 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(3 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (5, 3, -1)$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = (0.5, 1.75, 1.625)^T.$$

A2. Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -6y, \quad y(0) = D$.

a) Pro $y \in \mathcal{C}^2$ užijeme Tayl. polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku, tedy

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \underbrace{\frac{y''(\xi)}{2!}h^2}_{\mathcal{O}(h^2)}.$$

Vyjádříme

$$\frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) = y'(x)$$

Dále užitím toho, že $y(x)$ je řešení Cauchyovy úlohy, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

v předchozím vztahu dostaneme (pro $x = x_{n+1}$)

$$y(x_n) - y(x_{n-1}) = hf(x_n, y(x_n)) + \mathcal{O}(h^2).$$

Označíme hodnoty aproximací $y_n \approx y(x_n)$, nahradíme v přechozí rovnici a zanedbáme $\mathcal{O}(h^2)$. Dostaneme vzorec pro implicitní Eulerovu metodu

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)$$

nebo také

$$y_n - hf(x_n, y_n) = y_{n-1}.$$

b) Nejprve řešme temto příklad pomocí explicitní Eulerovy metody. Dle zadání vidíme, že $x_0 = 0$, $h > 0$, $y_0 = D > 0$. Pravá strana diferenciální rovnice je $f(x, y) = -6y$.

Hodnotu v bodě x_1 tedy spočteme dle vzorce z a)

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = (1 - 6h)y_0 = (1 - 6h)D,$$

a dále obdobně

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = (1 - 6h)y_1 = (1 - 6h)^2 D,$$

a

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = (1 - 6h)y_2 = (1 - 6h)^3 D.$$

Vidíme, že

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = (1 - 6h)y_{n-1}$$

a obecně tedy máme

$$y_n = (1 - 6h)^n D.$$

c) Užitím implicitní Eulerovy metody:

Obdobně jako v b) počítáme implicitní Eulerovou metodou (hodnoty aproximací označme z_i, $z_0 = D$, $x_0 = 0$, $h > 0$, $y_0 = D > 0$). Vidíme, že

$$z_1 - hf(x_1, z_1) = z_0, \qquad \rightarrow (1 + 6h)z_1 = z_0,$$

a tedy

$$z_1 = (1 + Ah)^{-1} D.$$

Obdobně dostaneme vztah pro

$$(1+6h)z_2 = z_1$$

a tedy

$$z_2 = (1+6h)^{-2}D.$$

Obecně

$$z_n = \frac{1}{(1+6h)^n}D.$$

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{81}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,t,$$

počáteční a okrajové podmínky $u(x,0) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2$, $u(-1,t) = 1$, $u(1,t) = \frac{1}{1+t^2}$.

		Poloha (u),	**Rychlost** (u_t)
a)	Bod $x=0, t=0$:	$(-1)^2 = 1$	$1-(-1)^2 = 0$
	Bod $x=1, t=0$:	$1^2 = \frac{1}{1+0^2} = (\frac{1}{1+t^2})\vert_{t=0}$,	$1 - 1^2 = -\frac{2\cdot 0}{(1+0^2)^2} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{1+t^2})\vert_{t=0}$

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

dosadíme do vlnové rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{81}{25}\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(P_i^k),$$

vynásobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{81\tau^2}{25h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + (2-2\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(P_i^k).$$

Na první časové vrstvě: Dle Taylorova rozvoje máme na první časové vrstvě

$$U_i^1 \approx u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$$

a tedy po zanedbání $\mathcal{O}(\tau^2)$ a s využitím počátečních podmínek

$$U_i^1 = x_i^2 + \tau\cdot(1 - x_i^2)$$

c) *Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.8, 0.2]$ explicitní metodou. Volte $h = 0.2$ a τ maximální tak, aby explicitní schéma bylo stabilní.*

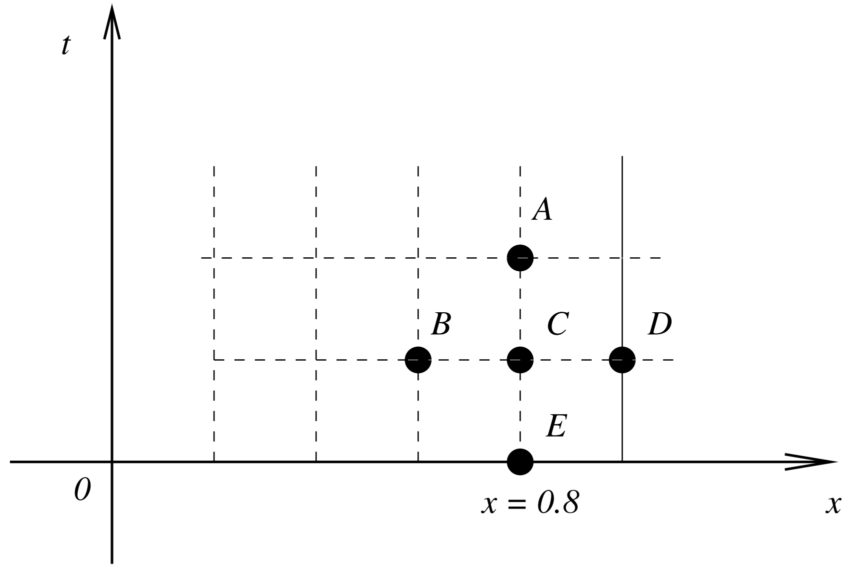
Volíme $h = 0.2$. Pro stabilitu potřebujeme $\sigma \le 1$, respektive $\sigma^2 \le 1$, tj.

$$\frac{81\tau^2}{25(0.2)^2} \le 1$$

nebo

$$\frac{9\tau}{5\cdot 0.2} \le 1, \qquad \tau \le \tau_{max} = \frac{1}{9} = 0.\overline{11}.$$

Tedy aby navíc bod A byl uzlem sítě, volíme $\tau = 0.1$. Nejprve si načrtneme síť v oblasti:



Pro část d) volíme krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.1 \leq \tau_{max}$. Pro tuto volbu vyjde $\sigma^2 = \frac{81}{25}\frac{0.01}{0.04} = \frac{81}{100} = 0.81$, budeme tedy počítat podle vzorce

$$U_i^{k+1} = 0.81U_{i+1}^k + 0.38U_i^k + 0.81U_{i-1}^k - U_i^{k-1} + 0.01\, f_i^k.$$

Hodnotu v bodě A určíme z hodnot v bodech, které si označíme $B = [0.6; 0.1]$, $C = [0.8; 0.1]$ a $D = [1; 0.1]$. Bod D leží na hranici, tedy

$$U_D = \frac{1}{1 + 0.01} \doteq 0.99.$$

Body B, C leží v první časové vrstvě, tedy přibližné hodnoty U_B, U_C určíme užitím náhrady na první časové vrstvě.

$$\begin{aligned} U_B &= u(0.6, 0) + 0.1\frac{\partial u}{\partial t}(0.6, 0) = 0.6^2 + 0.1(1 - 0.6^2) = 0.424, \\ U_C &= u(0.8, 0) + 0.1\frac{\partial u}{\partial t}(0.8, 0) = 0.8^2 + 0.1(1 - 0.8^2) = 0.676, \end{aligned}$$

Budeme dále ještě potřebovat hodnotu v bodě $E = [0.8, 0]$, který leží v nulté časové vrstvě a hodnota aproximace je dána počáteční podmínkou, tj. $U_E = u(E) = 0.8^2 = 0.64$. Užitím vzorce pro explicitní schéma dostáváme hodnotu aproximace v bodě A

$$u(0.8, 0.2) \approx U_A = 0.81\, U_B + 0.38\, U_C + 0.81\, U_D - U_E + 0.01 \cdot f(C),$$

kde hodnota $f(C) = 0.8 \cdot 0.1$ (rozmyslete si proč je funkce f vyčíslena právě v bodě C). Tedy

$$U_A \doteq 0.763.$$

A4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \qquad u(x, 0) = x - x^2, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

a) Nejprve Taylorův polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \underbrace{\frac{1}{4!}y''''(\xi)h^4}_{\mathcal{O}(h^4)}.$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 - \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

Sečtením

$$y(x-h) + y(x+h) - 2y(x) = y''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

Tedy

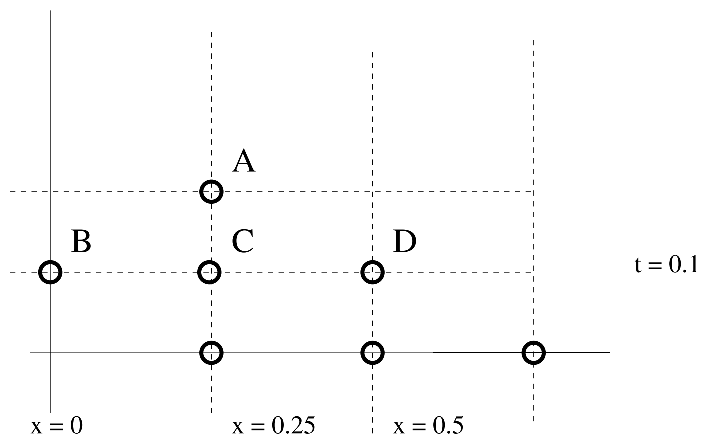
$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^4).$$

b) Ověříme, pro jakou volbu τ bude explicitní schéma stabilní. Je dán prostorový krok $h = 0.25$. Pro stabilitu máme podmínku

$$\sigma = \frac{1}{5}\frac{\tau}{0.25^2} \leq \frac{1}{2}, \qquad \text{tedy } \tau \leq \frac{5}{32} = \tau_{max}.$$

Volíme tedy $\tau = 0.1$, aby bod A byl uzlem sítě.

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ je $\sigma = 0.32$, tedy počítáme

$$U_A = 0.32U_B + 0.36U_C + 0.32U_D + 0.1 \cdot (0.25 \cdot 0.1),$$

kde hodnoty U_C, U_D jsou hodnoty na první časové vrstvě, hodnota $U_B = 0$ dle okrajové podmínky. Dále

$$U_C = 0.32(0) + 0.36(0.1875) + 0.32 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot (0.25 \cdot 0) = 0.1475.$$

$$U_D = 0.32(0.1875) + 0.36(0.25) + 0.32 \cdot 0.1875 + 0.1 \cdot (0.5 \cdot 0) = 0.21.$$

Hodnota

$$U_A = 0.32 \cdot 0 + 0.36 \cdot 0.1475 + 0.32 \cdot 0.21 + 0.1 \cdot (0.25 \cdot 0.1) = 0.1228.$$

Numerická matematika B – 11.6. 2015

B1.

a) Matice je ostře diagonálně dominantní (pro řádky ne, neboť v druhém řádku neplatí $2 > 1 + |-1|$).
Ve sloupcích ale ano:

$$\begin{array}{lrcl} \text{1. sloupec} & 5 & > & 1+1 \\ \text{2. sloupec} & 2 & > & 1+0 \\ \text{3. sloupec} & 4 & > & |-2|+|-1| \end{array}$$

Matice není symetrická, tedy není SPD (pozitivní definitnost již tedy nevyšetřujeme).

b) Gauss-Seidelova metoda je konvergentní, neboť dle a) je matice ODD.

Iterace počítáme dle

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 1\cdot x_2^k + 2\cdot x_3^k\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - 1\cdot x_1^{k+1} + 1\cdot x_3^k\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - x_1^k\right) \end{aligned}$$

Tedy z počáteční iterace $X^{(0)} = B$ dostaneme iteraci $X^{(1)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \to \qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

c)

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.9 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \qquad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = 2.2.$$

B2.

a) Rovnice je lineární, nemusíme tedy vyšetřovat parciální derivace dle y, y' a y''. Stačí spojitost koeficientů, která je splněna pokud $x \neq 0$. Vzhledem k poč. podmínce zadané pro $x = -3$ je tedy $I = (-\infty, 0)$

b)

$$\begin{array}{lll} z_1 = y, & z_1' = z_2, & z_1(-3) = 1 \\ z_2 = y', & z_2' = z_3, & z_2(-3) = 1 \\ z_3 = y'' & z_3' = 2\frac{z_2}{x^2}, & z_3(-3) = 1 \end{array}$$

c) Vidíme: $x_0 = -3,\ h = 1,\ Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2, \\ z_3, \\ 2\frac{z_2}{x^2}, \end{pmatrix} \qquad Z = (z_1, z_2, z_3)^T.$$

Počítáme

$$\boldsymbol{k}_1 = f(x_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_0 + h/2, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ \frac{10}{9} \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1.5 \\ \frac{10}{9} \\ 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.\overline{11} \\ 1.48 \end{pmatrix}$$

B3.

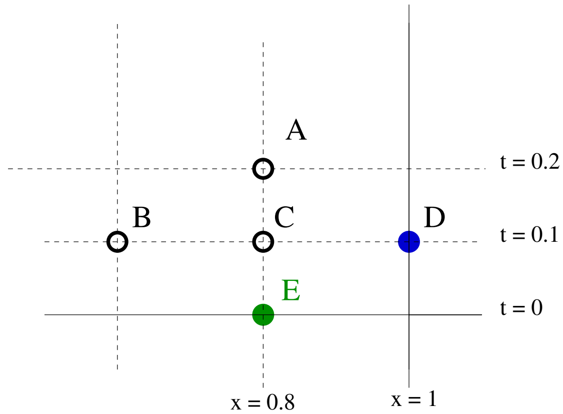
a) *Podmínky souhlasu:*

	Poloha (u),	**Rychlost** (u_t)
Bod $x = 0, t = 0$:	$x\|_{x=0} = t\|_{t=0}$,	$1 - 0 = 1$
Bod $x = 1, t = 0$:	$1 = 1$,	$1 - 1 = 0$

b) *Podmínka stability pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.2$:*

$$\sigma^2 = \frac{\tau^2}{h^2} = \frac{0.04}{0.25^2} = 0.64.$$

c) Nakreslíme si obrázek:



Hodnota $U_E = 0.75$ je dána počáteční podmínkou (nultá vrstva) a hodnota $U_D = 1$ je dána okrajovou podmínkou. Hodnoty na první časové vrstvě spočteme (náhrada na 1. časové vrstvě)

$$U_B = 0.5 + 0.2 \cdot (1 - 0.5) = 0.6,$$

$$U_C = 0.75 + 0.2 \cdot (1 - 0.75) = 0.8.$$

Určíme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.4]$.

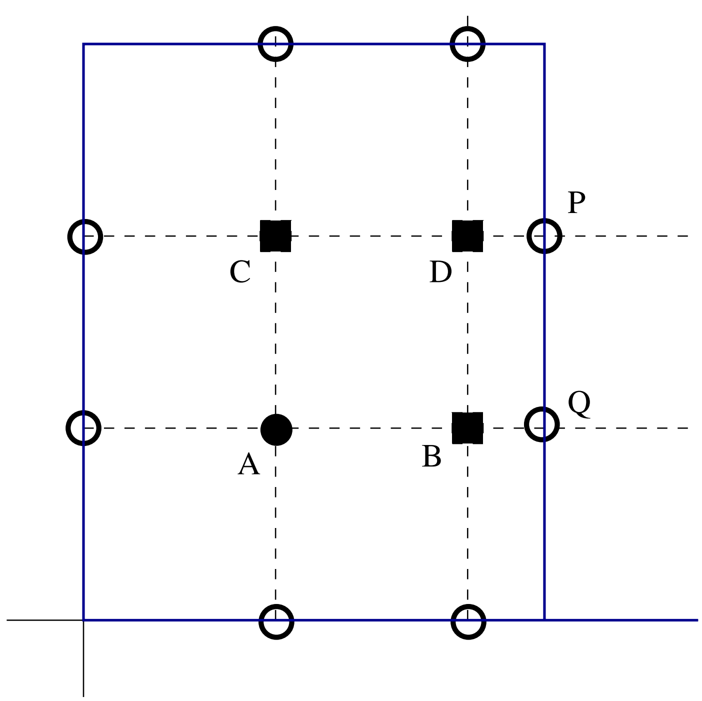
$$U_A = \sigma^2 U_B + (2 - 2\sigma^2) U_C + \sigma^2 U_D - U_E + \tau^2 f(C),$$

tedy

$$U_A = 0.64 \cdot (0.6) + 0.82 \cdot (0.8) + 0.64 \cdot (1) - (0.75) + 0.2^2 \cdot (0.75 \cdot 0.2) = 0.936$$

B4.

a) Nejprve si nakreslíme obrázek:



$$\begin{aligned} \text{regulární uzly:} \quad & A = [0.5, 0.5], C = [0.5, 1] \\ \text{neregulární:} \quad & B, D, \\ \text{hraniční:} \quad & Q = [1.2, 0.5], P = [1.2, 1] \end{aligned}$$

b) Nejprve sestavíme rovnice v regulárních uzlech (okrajová podmínka 1, pravá strana $2x - y$)

$$\begin{aligned} 4U_A - U_B - U_C - (1) - (1) &= 0.5^2(2 \cdot 0.5 - 0.5), \\ 4U_C - U_A - U_D - (1) - (1) &= 0.5^2(2 \cdot 0.5 - 1), \end{aligned}$$

a dále pak v uzlech neregulárních

$$1.4U_B - 0.4U_A = 1.$$

$$1.4U_D - 0.4U_C = 1.$$