Numerická matematika A – 10.9.2015

A1.

a) Vyjádřete kvadratickou odchylku $\delta^2(p_1(x))$ obecného polynomu $p_1(x)$ nejvýše 1. stupně od tabulky hodnot x_i, y_i. Uveďte, jakou podmínku má splňovat optimální polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který aproximuje danou tabulku hodnot nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

b) Užijte předchozího označení a zapište podmínky, ze kterých se odvodí soustava normálních rovnic pro polynom p_1^*. Tuto soustavu odvoďte!

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot. Soustavu vyřešte a určete polynom nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

x_i	-1	0	1	2	2
yi	-1.6	0	1.3	2.9	2.7

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 3y^3 = \sin(5\pi x) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

a) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Volte $h = 0.1$ a určete přibližnou hodnotu řešení $y(0.1)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4,$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, t_k]$ při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

c) Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a ověřte podmínku stability schématu. Určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.75; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[2;0]$, $[0;1.5]$, $[1.5;1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x,y) = xy$.

a) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$.

b) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.

Numerická matematika B – 10.9.2015

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Je daná matice A symetrická a zároveň pozitivně definitní? Zdůvodněte!

b) Určete $X^{(1)}$ Jacobiho iterační metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

c) Spočítejte řádkovou normu $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 10y = 1 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-1,1),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x + 2 \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle \text{ a } u(-1,t) = 0,\ u(1,t) = 4 - t \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability. Ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(x^2 y'\right)' + (x+1)y = -x^3 \qquad y(1) = 0, \quad y(5) = 0.$$

a) Zapište jaké podmínky jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro danou úlohu a krok $h = 1$. Rozhodněte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.