Numerická matematika A – 9.6.2016

A1.

a) Kvadratická odchylka polynomu nejvýše 1. stupně $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ je

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i (p_1(x_i) - y_i)^2 .$$

Optimální polynom $p_1^*(x)$ v daném případě má splňovat

$$\delta^2(p_1^*(x)) \leq \delta^2(p_1(x)),$$

tj. hledáme takový polynom pro který je kvadratická odchylka minimální. Všimněme si, že kvadratická odchylka pro tento případ je funkcí dvou proměnných (koeficientů a_0 a a_1).

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i (p_1(x_i) - y_i)^2 = \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = G(a_0, a_1)$$

b) Kvadratická odchylka je hladká funkce proměnných a_0 a a_1. Minimum kvadratické odchylky tedy může nastat pouze ve stacionárním bodě, tj. dostáváme podmínky $\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial a_a} = 0$. Tedy po zderivování

$$2 \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, 1 = 0,$$

$$2 \sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, x_i = 0.$$

Upravíme do tvaru

$$a_0 \sum_i 1 + a_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i$$

$$a_0 \sum_i x_i + a_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

c) Nejprve vypočteme součty

$$\sum_i 1 = 5, \qquad \sum_i x_i = -4, \qquad \sum_i x_i^2 = 10, \sum_i y_i = 5.3, \qquad \sum_i x_i y_i = -14.1$$

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ -14.1 \end{pmatrix}$$

Řešení je $a_0 = -0.1$, $a_1 = -1.45$ a optimální polynom $p_1^*(x) = -0.1 - 1.45x$

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu ODR

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 \\ y_1 + y_2 - 2x \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Vzorec pro Collatzovu metodu je dán jako

$$y_{n+1} = y_n + h\boldsymbol{k}_2,$$

kde

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1), \qquad \boldsymbol{k}_1 = f(x_n, y_n).$$

Obecná jednokroková metoda

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h).$$

Volbou přírůstkové funkce

$$\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n + h/2, y_n + h/2 f(x_n, y_n)).$$

dostáváme Collatzovu metodu. Vidíme tedy, že Collatzova metoda je speciálním případem jednokrokové metody.

b) Označme $y(x)$ přesné řešení Cauchyovy úlohy. Přesný relativní přírůstek $\Delta(x, y, h)$ je definován vztahem

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y(x_n), h)$$

Lokální relativní aproximační chyba je pak rozdíl přírůstkové funkce a přesného relativního přírůstku, tedy

$$\delta_n = \Delta(x_n, y(x_n), h) - \Phi(x_n, y(x_n), h),$$

tj. vidíme, že pak platí

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h) + h\delta_n$$

Akumulovaná diskretizační chyba (globální) chyba je rozdíl přibližného a přesného řešení

$$e_n = y_n - y(x_n).$$

Pozor: Akumulovaná diskretizační (globální) chyba není (jen) součtem lokálních diskretizačních chyb !!!

c) Volte $h = 0.4$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.4)$ užitím Collatzovy metody. Pro danou rovnici $Y' = f(x, Y)$ je tedy

$$f(x, Y) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 \\ y_1 + y_2 - 2x \end{pmatrix}.$$

Krok volíme jako $h = 0.4$, počáteční podmínka

$$x_0 = 0, \qquad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Počítáme Collatzovou metodou

$$\boldsymbol{k}_1 = f(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1^2 - 1^2 \\ 1 + 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dále

$$Y_{pom} = Y^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} 1^2 - 1.4^2 \\ 1 + 1.4 - 2 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.96 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aproximace řešení v bodě $x = 0.4$ tedy $Y(0.4)$ je pak dána

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} -0.96 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.616 \\ 1.8 \end{pmatrix}.$$

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x, t] : x \in (-2, 2),\ t > 0\},$$

$$u(x, 0) = x^2 - 4 \text{ pro } x \in \langle -2, 2\rangle \text{ a } u(-1, t) = 4t,\ u(1, t) = \sqrt{t} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) V případě implicitního schéma užijeme v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_{k+1}]$ náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) = \frac{u(P_{i-1}^{k+1}) - 2u(P_i^{k+1} + u(P_{i+1}^{k+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2}.$$

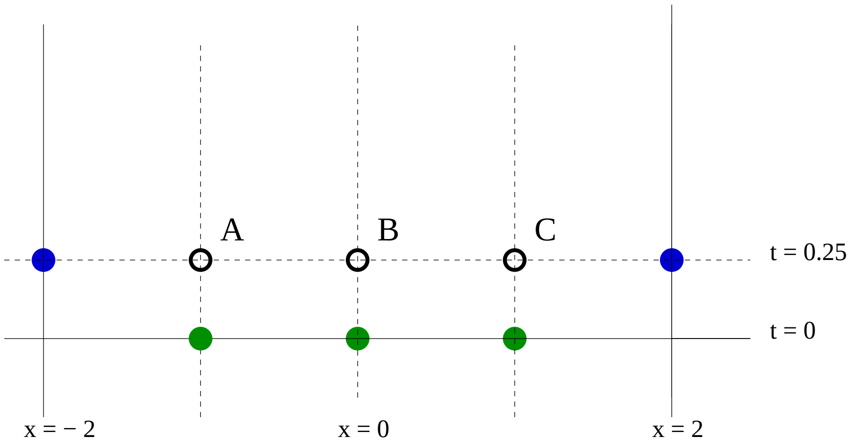
Použijeme tyto náhrady v rovnici a dostaneme

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 3\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + 2\,x_i t_{k+1}.$$

Rovnici vynásobíme τ, označíme $\sigma = \frac{3\tau}{h^2}$ a upravíme

$$-\sigma\, U_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\sigma)\, U_i^{k+1} - \sigma\, U_{i-1}^{k+1} = U_i^k + 2\tau\, x_i t_{k+1}.$$

b) Volíme $h = 1.0$ a $\tau = 0.25$, tedy $\sigma = \frac{3\tau}{h^2} = \frac{0.75}{1.0} = 0.75$. Nejprve si načrtneme síť v oblasti:



Sestavíme rovnice dle a), v uzlech na první časové vrstvě (označených v obrázku zelenou barvou) užijeme počáteční podmínku (x^2-4), v hraničních uzlech (modrá barva) užijeme okrajové podmínky ($4t$ a $\sqrt{t}$). Tedy

$$\begin{aligned} -0.75\,(4\cdot 0.25) + 2.5\,U_A - 0.75\,U_B &= ((-1)^2-4) + 0.25\cdot 2\cdot(-1)\cdot 0.25,\\ -0.75\,(U_A) + 2.5\,U_B - 0.75\,U_C &= (0^2-4) + 0.25\cdot 2\cdot(0)\cdot 0.25,\\ -0.75\,(U_B) + 2.5\,U_C - 0.75\,(\sqrt{0.25}) &= (1^2-4) + 0.25\cdot 2\cdot(1)\cdot 0.25. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic upravíme a zapíšeme např. v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 2.5 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 2.5 & -0.75 \\ 0 & -0.75 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.125 \\ -4 \\ -2.875 \end{pmatrix}.$$

c) Soustava rovnic je soustava se symetrickou pozitivně definitní maticí a také ostře diagonálně dominantní maticí. Vzhledem k tomu, že matice je ODD, tak je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

A4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x,t)$ takovou, že v oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (0,\pi),\ t \in (0,T)\}$ je splněna rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

a navíc jsou splněny počáteční a okrajové podmínky $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

a) Ověříme, zda je funkce $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$ řešením dané úlohy:

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = -4\pi^2 \sin(\pi x)\cos(2\pi t),$$

$$4\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = -4\pi^2 \sin(\pi x)\cos(2\pi t),$$

tedy

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 4\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + 0.$$

Tato funkce navíc splňuje jak počáteční podmínky

$$u(x,0) = \sin(\pi x)\cos(2\pi 0) = \sin(\pi x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\pi\sin(\pi x)\sin(2\pi 0) = 0$$

tak i okrajové podmínky

$$u(0,t) = \sin(\pi 0)\cos(2\pi t) = 0, \qquad u(1,t) = \sin(\pi)\cos(2\pi t) = 0.$$

b) Užijeme náhrady

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

dosadíme do vlnové rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = 4\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(P_i^k),$$

vynásobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{4\tau^2}{h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + (2 - 2\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(P_i^k).$$

Na první časové vrstvě: Dle Taylorova rozvoje máme na první časové vrstvě

$$U_i^1 \approx u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$$

a tedy po zanedbání $\mathcal{O}(\tau^2)$ a s využitím počátečních podmínek

$$U_i^1 = \sin(\pi x_i) + \tau \cdot 0.$$

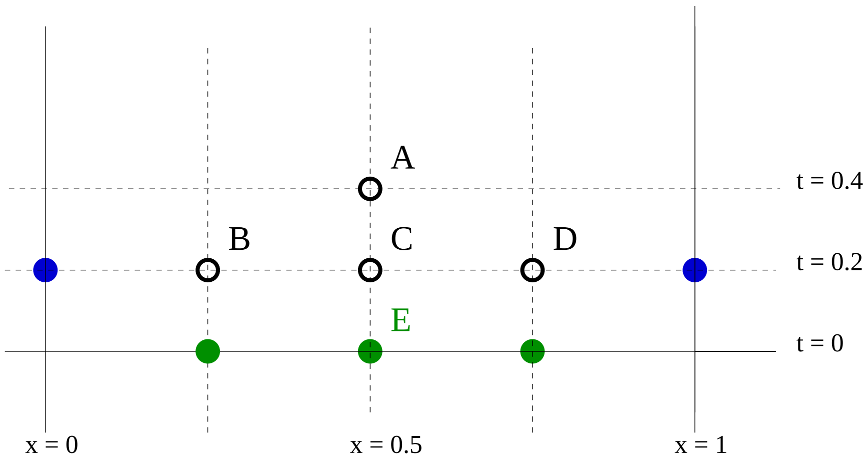
c) Podmínka stability explicitního schématu

$$\sigma \leq 1$$

Pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ a danou rovnici máme

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot 0.01}{0.25^2} = 64 \cdot 0.01 = 0.64.$$

Uvažujeme $f(x,t) = xt$, prostorový krok $h = 0.25$ a časový krok $\tau = 0.1$.



Počítáme přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.5; 0.2]$.

$$U_A = 0.64U_B + 0.72U_C + 0.64U_D - \sin(0.5\,\pi) + 0.01(0.5 \cdot 0.1),$$

kde hodnoty v uzlech B, C, D leží v první časové vrstvě (viz b)), tedy

$$U_B = \sin(0.25\pi) + 0.2 \cdot 0 = \sqrt{2}/2,$$
$$U_C = \sin(0.5\,\pi) + 0.2 \cdot 0 = 1,$$
$$U_D = \sin(0.75\pi) + 0.2 \cdot 0 = \sqrt{2}/2.$$

Tedy po dosazení

$$U_A = 0.64 \cdot \sqrt{2}/2 + 0.72 \cdot 1 + 0.64 \cdot \sqrt{2}/2 - 1 + 0.01(0.5 \cdot 0.1) \doteq 0.6251 + 0.01 \cdot 0.05 = 0.6256.$$

Numerická matematika B – 9.6.2016

B1. Tabulka hodnot

x_i	0	1	2	2
y_i	0	1	1	2

a) Z tabulky hodnot vypočteme

$$\sum_i 1 = 4, \qquad \sum_i x_i = 5, \qquad \sum_i x_i^2 = 9, \qquad \sum_i x_i^3 = 17, \qquad \sum_i x_i^4 = 33,$$

$$\sum_i y_i = 4, \qquad \sum_i x_i y_i = 7, \qquad \sum_i x_i^2 y_i = 13,$$

a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b) Řešení soustavy je

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{5}{4}, a_2 = -\frac{1}{4}.$$

polynom

$$p_2(x) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}x^2.$$

c)

$$p_2(1) = 1.0$$

B2. Cauchyova úloha

$$y'' = x - y + 2y' \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

a) *Převeďte rovnici (včetně poč. podmínek) na soustavu rovnic 1. řádu.*

$$\begin{array}{lll} y_1 = y & y_1' = y_2 & y_1(0) = 1 \\ y_2 = y' & y_2' = x - y_1 + 2y_2 & y_2(0) = 0 \end{array}$$

nebo $Y' = F(x, Y)$, $Y = (y_1, y_2)^T$ a

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ x - y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lineární ODR 2. řádu s konst. koeficienty a pravá strana také konstanta. Tedy $I = (-\infty, +\infty)$.

b) *Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.*

Collatzova metoda

$$x_0 = 0, Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h = 1.0$$

$$\boldsymbol{k}_1 = F(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{pom} = Y^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F(x_0 + h/2, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 + 0.5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.0 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.0 \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$

Tedy vzhledem k tomu, že $Y = (y_1, y_2)^T = (y, y')^T$ máme

$$y'(1) = y_2(1) \approx -1.0$$

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-2,2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2x \text{ pro } x \in \langle -2, 2\rangle \text{ a } u(-2,t) = t-4,\ u(2,t) = 4 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Podmínky souhlasu.

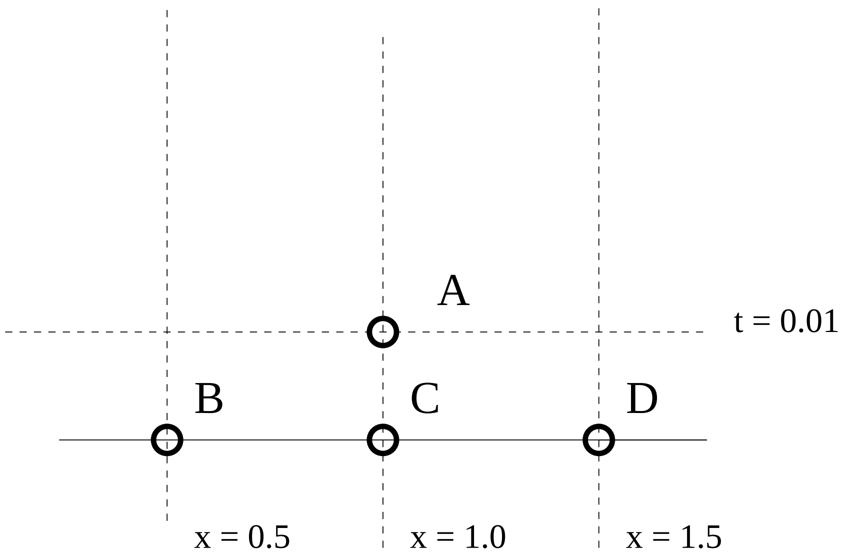
Bod x = -2, t = 0: $\quad 2 \cdot (-2) = u(-2,0) = 0 - 4 \quad$ (splněno)

Bod x = 2, t = 0: $\quad 2 \cdot (2) = u(2,0) = 4 \quad$ (splněno)

b) Podmínka stability explicitního schématu:

$$\sigma = \frac{3\tau}{h^2} = \frac{3 \cdot 0.01}{0.5^2} = 3\frac{0.01}{0.25} = 0.12 \leq \frac{1}{2}.$$

c) Nejprve si nakreslíme obrázek



Přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [1.0; 0.01]$ určíme explicitním schematem:

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + \tau f(C),$$

kde $U_B \approx u(0.5, 0), U_C \approx u(1.0, 0), U_D \approx u(1.5, 0)$ jsou hodnoty na nulté časové vrstvě dány počáteční podmínkou $2x$. Tedy

$$U_A = 0.12 \cdot (1.0) + 0.76 \cdot (2.0) + 0.12 \cdot (3.0) + 0.01(2 \cdot 1.0 \cdot 0.0) = 2.0$$

B4. Zabýváme se Dirichletovou okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + \frac{4}{x}y = 1 \qquad y(1) = 0, y(4) = 0.$$

a) *Postačující podmínky pro Dirichletovu úlohu ve tvaru*

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

jsou:

(i) Spojitost funkcí p, p', q *a* f *na intervalu* $I = \langle a, b\rangle$.

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in I$.

Pro danou úlohu máme $p(x) = x$, $q(x) = 4/x$ a $f(x) = 1$, tedy **podmínka (i)**: spojitost funkcí **je splněna** (uvažujeme i spojitost $p'(x) = 1$) na uvažovaném intervalu $I = \langle 1, 4 \rangle$.

Dále na tomto intervalu I navíc platí $p(x) = x > 0$ i $q(x) = 1 \geq 0$, tj. také **podmínka (ii) je splněna.**

Postačující **podmínky** pro existenci a jednoznačnost řešení dané úlohy **jsou** tedy **splněny**. *(Pozn. Dokonce nezávisle na volbě Sturmových okrajových podmínek ($q(x) > 0$), nejen pro uvažované Dirichletovy okrajové podmínky)*

b) Zapíšeme nejprve síťové rovnice pro krok $h = 1$ v uzlech $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$

$$\begin{aligned} -1.5\, y_0 + (1.5 + 2.5 + 1^2 \cdot \frac{4}{2})\, y_1 - 2.5\, y_2 &= 1^2 \cdot 1, \\ -2.5\, y_1 + (2.5 + 3.5 + 1^2 \cdot \frac{4}{3})\, y_2 - 3.5\, y_3 &= 1^2 \cdot 1, \end{aligned}$$

kde jsme vyčíslili hodnoty funkce $p(x) = x$ v uzlech $x_{1/2} = 1.5$, $x_{1+1/2} = 2.5$ a $x_{2+1/2} = 3.5$ a dosadili jsme hodnoty $y_0 = y(1) = 0$ a $y_3 = y(4) = 0$ z okrajových podmínek. Tedy

$$\begin{aligned} 6y_1 - 2.5y_2 &= 1, \\ -2.5y_1 + \frac{22}{3}y_2 &= 1, \end{aligned}$$

c) Matice soustavy je ostře diagonálně dominantní(ODD) tak i symetrická a pozitivně definitní (SPD). Pro Jacobiovu metodu je ODD postačující pro konvergenci, tedy Jacobiova metoda bude konvergentní.