Numerická matematika A – 9.6.2016

A1.

a) Vyjádřete kvadratickou odchylku $\delta^2(p_1(x))$ obecného polynomu $p_1(x)$ nejvýše 1. stupně od tabulky hodnot x_i, y_i. Uveďte, jakou podmínku má splňovat optimální polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který aproximuje danou tabulku hodnot nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

b) Užijte předchozího označení a zapište podmínky, ze kterých se odvodí soustava normálních rovnic pro polynom p_1^*. Tuto soustavu odvoďte!

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot. Soustavu vyřešte a určete polynom nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců.

x_i	-2	-2	-1	0	1
y_i	2.7	2.9	1.3	0	-1.6

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2^2 \\ y_1 + y_2 - 2x \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište vzorec pro výpočet hodnoty aproximace y_{n+1} v uzlu x_{n+1} Collatzovou metodou při řešení Cauchovy úlohy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Ukažte, že Collatzova metoda je speciálním případem jednokrokové metody a uveďte jaký tvar má v tomto případě přírůstková funkce $\Phi(x, y, h)$.

b) Označme y_n hodnoty aproximací přesného řešení $y(x)$ Cauchyovy úlohy z a) v uzlech x_n získané obecnou jednokrokovou metodou. Užitím tohoto označení zapište vztah pro přesný relativní přírůstek $\Delta(x, y(x), h)$, lokální relativní aproximační chybu δ_{n+1} v uzlu x_{n+1} a akumulovanou diskretizační (globální) chybu e_n této metody.

c) Volte $h = 0.4$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x, t] : x \in (-2, 2),\ t > 0\},$$

$$u(x, 0) = x^2 - 4 \text{ pro } x \in \langle -2, 2\rangle \text{ a } u(-2, t) = 4t,\ u(2, t) = \sqrt{t} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla implicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Ověřte podmínky souhlasu pro danou úlohu. Volte prostorový krok $h = 1.0$ a časový krok $\tau = 0.25$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu.

c) Rozhodněte, zda je Jacobiova iterační metoda pro soustavu rovnic z b) konvergentní.

A4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

kde počáteční a okrajové podmínky jsou dány $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$.

a) Rozhodněte, zda funkce $u(x, t) = \sin(\pi x)\cos(2t)$ je řešením dané úlohy pro $f(x, t) = 0$. Zdůvodněte!

b) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte. Dále pak odvoďte náhradu na první časové vrstvě.

c) Ověřte, zda pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ bude explicitní schéma stabilní. Užijte $f(x, t) = xt$ a určete přibližnou hodnotu $u(0.5, 0.2)$ použitím explicitního schématu.

Numerická matematika B – 9.6.2016

B1. Určete polynom nejvýše 2. stupně $p_2(x)$, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje data zadaná tabulkou hodnot:

x_i	0	1	2	2
y_i	0	1	1	2

a) Zapište v maticovém tvaru soustavu rovnic pro určení koeficientů hledaného polynomu.

b) Nalezněte řešení soustavy a zapište výsledný polynom.

c) Vypočtěte hodnotu tohoto polynomu v bodě $x = 1$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = x - y + 2y' \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

a) Převeďte danou diferenciální rovnici na soustavu rovnic prvního řádu (včetně počátečních podmínek).

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (-2,2),\ t > 0\}\,,$$

$$u(x,0) = 2x \text{ pro } x \in \langle -2, 2\rangle \text{ a } u(-2,t) = t - 4,\ u(2,t) = 4 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu pro danou rovnici a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.5$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [1.0, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(xy'\right)' + \frac{4}{x}\,y = 1 \qquad y(1) = 0, y(4) = 0.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$. Ověřte, zda jsou pro danou úlohu splněny.

b) Zapište soustavu síťových rovnic pro krok $h = 1$.

c) Rozhodněte, zda matice soustavy v b) je ostře diagonálně dominantní (ODD) nebo symetrická a pozitivně definitní (SPD).

d) Je soustava z b) řešitelná Jacobiovou metodou? Zdůvodněte!