Numerická matematika A – 8.6.2017

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) Rozhodněte, zda daná matice A je symetrická a zároveň pozitivně definitní. Ověřte, zda daná matice A je ostře diagonálně dominantní.

b) Ověřte, že pro danou matici A je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní!

c) Volte $X^{(0)} = B$ a proveďte výpočet $X^{(1)}$ Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

A2. Je dáno $h > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -2y, \quad y(0) = -100$.

a) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu derivace $y'(x)$ pomocí hodnot $y(x)$, $y(x-h)$. Užitím této náhrady odvoďte vzorec pro Eulerovu implicitní metodu pro numerické řešení Cauchyovy úlohy.

b) Užitím explicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte (vyjádřete) hodnoty aproximace řešení v bodech $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$ a $j = n$.

c) Užitím implicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte (vyjádřete) hodnoty aproximace řešení v bodech x_j pro $j = 1, 2$ a $j = n$.

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = 3x + 2y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = 2xy$.

a) Užitím Taylorova rozvoje pro $y \in \mathcal{C}^4(I)$ v bodě x_i vyjádřete hodnoty v bodech $x_i \pm h$. Odvoďte náhradu $y''(x_i)$ pomocí hodnot $y(x_i + h)$, $y(x_i)$ a $y(x_i - h)$ a zapište jaké chyby se dopustíte.

b) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$ uvedený v zadané úloze. Rozepište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí tyto parciální derivace, a odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$. Stručně vysvětlete význam všech symbolů.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

A4. V oblasti $Q_T = \{[x, t] : x \in (0, 4),\ t \in (0, T)\}$ je zadána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xt, \qquad u(x, 0) = x \cdot (2 - x), \quad u(0, t) = 2t, \quad u(4, t) = 4t - 8,$$

a) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ na k-té časové vrstvě při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Užijte tyto náhrady pro danou rovnici a toto schéma odvoďte. Zapište podmínku jeho stability. Stručně vysvětlete význam všech symbolů.

b) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu (tyto podmínky uveďte)! Pro prostorový krok $h = 1$ určete maximální časový krok τ_{max}, tak aby bod $A = [2, 2]$, byl uzlem sítě a explicitní schéma bylo stabilní.

c) Volte $h = 1$ a τ_{max} určené v předchozím bodě b) a pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [2, 2]$.

Numerická matematika B – 8.6.2017

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Je daná matice A symetrická a zároveň pozitivně definitní? Zdůvodněte!

b) Určete $X^{(1)}$ Gaussovou-Seidelovou iterační metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

c) Spočítejte řádkovou normu $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \cdot (t+1) \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(1)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - 3t \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x,t] : x \in (1,5),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = x^2 \text{ pro } x \in \langle 1,5 \rangle \text{ a } u(1,t) = t+1,\ u(5,t) = \frac{50-t}{2} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability. Pro volbu $h = 0.5$ určete maximální τ_{max} tak, aby bod $A[2, 0.025]$ byl uzlem sítě a explicitní schéma bylo stabilní.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[2, 0.025]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ_{max} dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = xy$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[4,0]$, $[2.5,2]$, $[0,2]$, kde na hranici je předepsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 3x + 2y$.

a) Nakreslete oblast a síť s krokem $h = 1$ (síť volte tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě). Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly. Zapište souřadnice všech těchto uzlů na přímce $y = 1$.

b) Sestavte všechny síťové rovnice, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.