

Numerická matematika A – 4.6.2015

A1. Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Ukažte, že platí vztah $\|\mathbf{A}\| \geq \rho(\mathbf{A})$, kde $\rho(\mathbf{A})$ je spektrální poloměr matice \mathbf{A} !
- Rozhodněte, zda je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní. V kladném případě určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Užitím vzorce

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\mathbf{U}\|^k}{1 - \|\mathbf{U}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

odhadněte chybu $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(2)}\|$, kde \mathbf{x}^* je přesné řešení soustavy.

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1 - y_2^2 \\ y_1^2 - 2y_2 + 5x \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

- Zapište vzorec pro Collatzovu metodu pro Cauchovu úlohu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Ukažte, že Collatzova metoda je speciálním případem jedнокrokové metody a uveďte jaký tvar má v tomto případě přírůstková funkce.
- Definujte pojem přesný relativní přírůstek, lokální relativní aproximační chyba a akumulovaná diskretizační (globální) chyba obecné jedнокrokové metody.
- Volte $h = 0.4$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4,$$

s počátečními a okrajovými podmínkami $u(x, 0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 1$ pro $t \geq 0$.

- Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny. Stručně vysvětlete, co tyto podmínky znamenají a důvod, proč požadujeme, aby byly splněny.
- Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, t_k]$ při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.
- Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.75; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schématu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = xy$.

- Uveďte, o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol ∇ . Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj. $-\nabla \cdot (\nabla u)$ pomocí druhých parciálních derivací.
- Vysvětlete pojem neregulární uzel a odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.
- Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.

B1. Pro soustavu nelineárních rovnic

$$1 - y(1 + x) = 0, \quad x^2 + y - 1 = 0$$

- Z grafu určete přibližnou polohu všech řešení soustavy,
- Zvolte počáteční aproximaci $X^{(0)} = (-1, 1)^T$ a určete $X^{(1)}$ Newtonovou iterační metodou.

B2. Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX$, $X(0) = X_0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Určete spektrální poloměr matice A !
- Volte krok $h = 0.1$ a spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě $t = 0.1$ Eulerovou metodou.
- Volte krok $h = 0.1$ a spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě $t = 0.1$ Collatzovou metodou

B3. V oblasti $Q_T = \{[x, t] : x \in (0, 1), t > 0\}$ je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x,$$

$$u(x, 0) = x(x - 1), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 - x^2, \quad u(0, t) = \sin(t), \quad u(1, t) = 0.$$

- Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.
- Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro $h = 0.2$ a $\tau = 0.1$ je splněna.
- Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.2]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána Dirichletova okrajová úloha v pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-(x^2 y')' + (x + 1)y = -x^3 \quad y(1) = 0, \quad y(5) = 0.$$

- Zapište jaké podmínky jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.
- Zapište síťové rovnice pro danou úlohu a krok $h = 1$. Rozhodněte, zda matice této soustavy je ostře diagonálně dominantní.