

Numerická matematika A – 2.7.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Je pro danou matici A Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte proč!

Dle nutné a postačující podmínky $\rho(U_{GS}) < 1$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda - 4\lambda^2 + 4\lambda^2 - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

Tedy $\lambda_{1,2} = \pm 2$, $\lambda_3 = 0$. Spektrální poloměr matice U_{GS} je $\rho(U_{GS}) = 2 \geq 1$. Gauss-Seidelova metoda tedy není konvergentní, není splněna nutná a postačující podmínka její konvergence (tj. podmínka $\rho(U_{GS}) < 1$).

b) Je pro danou matici A Jacobiova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte proč!

Dle nutné a postačující podmínky pro Jac. it. met.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4 - 4 + 4\lambda - 2\lambda - 2\lambda = \lambda^3 = 0$$

Tedy $\lambda_{1,2,3} = 0$ a $\rho(U_J) = 0 < 1$. Jacobiho metoda je konvergentní, je splněna nutná a postačující podmínka její konvergence (tj. podmínka $\rho(U_J) < 1$).

c) Volte $X^{(0)} = \mathbf{b}$ a proveďte výpočet $X^{(1)}$ Jacobiovou iterační metodou. Dále si soustavu rovnic přepíšeme ve složkovém zápise z kterého vyjádříme i -tou složku z i -té rovnice. Tedy rovnice

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

upravíme a doplníme čísla iterací:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{1} \left(1 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1} \left(1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1} \left(1 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Volíme $X^0 = (1, 1, 1)^T$, dosadíme do předchozích rovnic a spočteme

$$X^1 = (1, -1, -3)^T.$$

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 3y^3 = \sin(5\pi x) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

a) Označte $y(x)$ řešením Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, užíjte vztah

$$y'(x + h/2) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

v bodě $x = x_n$, a odvoďte vzorec pro Collatzovu metodu. Užíjte to, že y je řešením Cauchyovy úlohy, Taylorův rozvoj. Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte.

Nejprve užíjeme vzorec a to, že y je řešením Cauchyovy úlohy, tj.

$$\frac{y(x + h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h^2) = y'(x + h/2) = f(x + h/2, y(x + h/2)).$$

Dále dle Taylorova rozvoje

$$y(x + h/2) = y(x) + \frac{h}{2}y'(x) + \mathcal{O}(h^2),$$

kde $y'(x) = f(x, y(x))$. Dostáváme

$$y(x + h) = y(x) + hf\left(x + h/2, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2)\right) + h\mathcal{O}(h^2).$$

Zanedbáme-li $\mathcal{O}(h^2)$ dostaneme

$$y(x + h) \approx y(x) + hf\left(x + h/2, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y(x))\right)$$

kde pro $x = x_n$ dostáváme vzorec pro aproximace $y(x_n) \approx y_n$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + h/2, y_n + h/2\mathbf{k}_1), \quad \mathbf{k}_1 = f(x_n, y_n).$$

b) Danou rovnicí převed'te na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

$$\begin{aligned} z_1 &= y & z_1' &= z_2 \\ z_2 &= y' & z_2' &= \sin(5\pi x) - z_2 - 3z_1^3 \end{aligned}$$

Nebo také $Z' = F(x, Z)$, kde

$$F(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \sin(5\pi x) - z_2 - 3z_1^3 \end{pmatrix}$$

c) Volte $h = 0.1$ a určete přibližnou hodnotu řešení $y(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

$$x_0 = 0, Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h = 0.1$$

$$\mathbf{k}_1 = F(0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(5 \cdot \pi \cdot 0) - 0 - 3 \cdot 0^3 \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + 0.05\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{k}_2 = F(0.05, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(5 \cdot \pi \cdot 0.05) - 0 - 3 \cdot 0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + 0.2\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1414 \end{pmatrix}.$$

A3. Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$-(2y')' + 4xy = 2 \quad y(1) = 0, \quad y(3) = -1$$

- a) *Ověřte, že daná okrajová úloha má právě jedno řešení. Zapište přesně všechny podmínky, které ověřujete*

Úloha lze zapsat jako

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(3) = -1,$$

kde $p(x) = \frac{1}{2}$ a $q(x) = 4x$, $f(x) = 2$ Na intervalu $I = \langle 1, 3 \rangle$ jsou funkce p, p', q ale také f spojitě. Funkce $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$.

- b) *Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h)-z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro $h := \tilde{h}/2$ a výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm h/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady. Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru v uzlu x_n .*

Použijeme

$$z'(x) = \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

pro $h := h/2$ a $z(x) = p(x)y'(x)$. Tedy

$$z'(x_n) = (p(x)y'(x))' |_{x=x_n} \approx \frac{p(x_n - h/2)y'(x - h/2) - p(x_n + h/2)y'(x + h/2)}{2\frac{h}{2}}$$

kde označíme $p_{n\pm 1/2} = p(x \pm h/2)$. Dále pak

$$y'(x_n - h/2) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \quad y'(x_n + h/2) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Tedy

$$(p(x)y'(x))' |_{x=x_n} \approx \frac{1}{h^2} [p_{n-1/2}y_{n-1} - (p_{n-1/2} + p_{n+1/2})y_n + p_{n+1/2}y_{n+1}].$$

Náhrada rovnice v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ v uzlu x_n pak je po úpravě

$$-p_{n-1/2}y_{n-1} + (p_{n-1/2} + p_{n+1/2} + h^2q(x_n))y_n - p_{n+1/2}y_{n+1} = h^2f(x_n)$$

případně označíme $q_n = q(x_n)$ a $f_n = f(x_n)$.

- c) *Volte krok $h = 0.5$ a sestavte soustavu lineárních rovnic pro řešení dané úlohy metodou sítí.*

$$\begin{aligned} -2 \cdot 0 + (4 + 0.25 \cdot 4 \cdot 1.5)y_1 - 2y_2 &= 0.5^2 \cdot 2, \\ -2 \cdot y_1 + (4 + 0.25 \cdot 4 \cdot 2)y_2 - 2y_3 &= 0.5^2 \cdot 2, \\ -2 \cdot y_2 + (4 + 0.25 \cdot 4 \cdot 2.5)y_3 - 2 \cdot (-1) &= 0.5^2 \cdot 2, \end{aligned}$$

Upravíme

$$\begin{pmatrix} 5.5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

A4. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \quad u(x, 0) = 4x, \quad u(1, t) = \frac{8}{2+t}, \quad u(5, t) = 2t + 20,$$

- a) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Dosad'te tyto náhrady do dané rovnice a tuto upravte.

Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

kde $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$. Dosadíme do rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = 0.5 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + x_i + 2t_k$$

vynásobíme τ , označíme $\sigma = \frac{0.5\tau}{h^2}$ a dostaneme (explicitní schéma)

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau \cdot (x_i + 2t_k).$$

- b) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu.

$$\text{Bod } x = 1, t = 0: \quad 4 \cdot x|_{x=1} = u(1, 0) = \frac{8}{2+t}|_{t=0}$$

$$4 \cdot 1 = u(1, 0) = \frac{8}{2+0} \quad (\text{splněno})$$

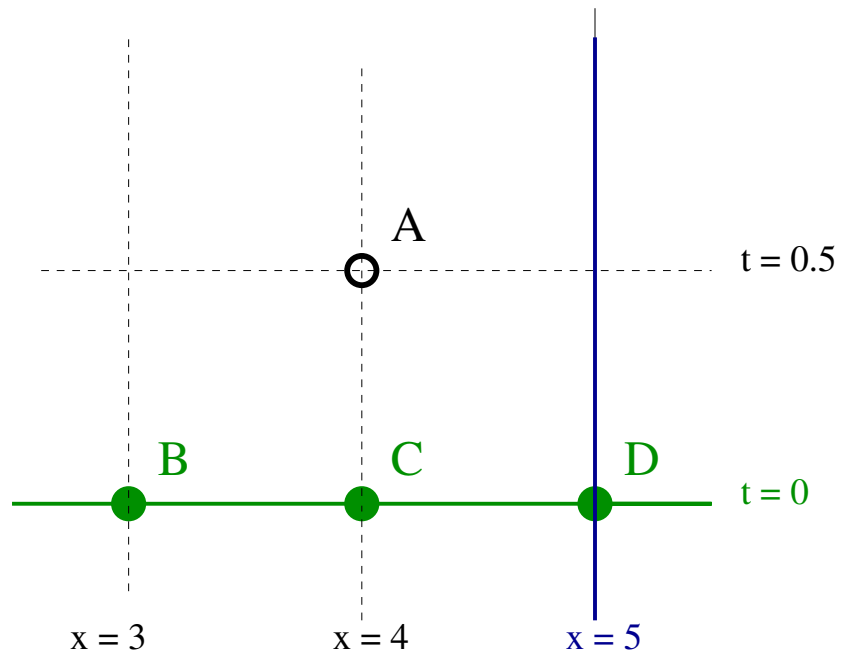
$$\text{Bod } x = 5, t = 0: \quad 4 \cdot x|_{x=5} = u(5, 0) = 2 \cdot t + 20|_{t=0}$$

$$4 \cdot 5 = u(5, 0) = 2 \cdot 0 + 20 \quad (\text{splněno})$$

Rozhodněte, zda explicitní schéma bude stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$.

$$\sigma = \frac{0.5 \cdot \tau}{h^2} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{1^2} = 0.25$$

- c) Volte $h = 1$ a $\tau = 0.5$ a pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [4, 0.5]$.



$$U_B = 4 \cdot 3, \quad U_C = 4 \cdot 4, \quad U_D = 4 \cdot 5.$$

Tedy

$$U_A = 0.25U_B + (1 - 2 \cdot 0.25)U_C + 0.25U_D + \tau(4 + 2 \cdot 0) = 18$$

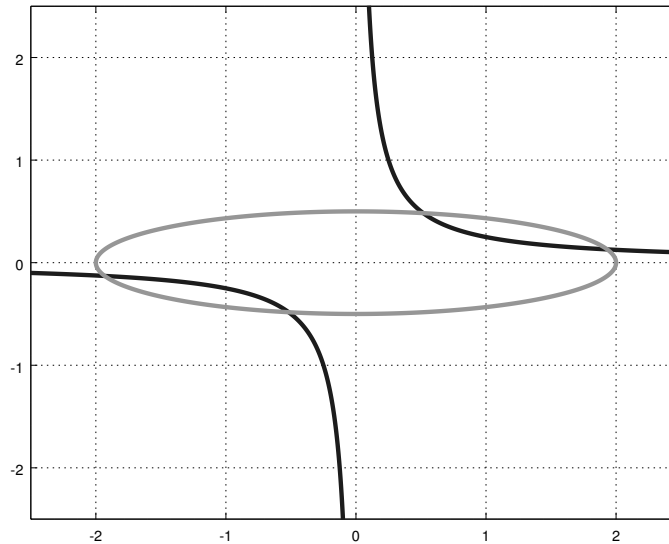
Numerická matematika B – 2.7.2015

B1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\frac{1}{x} - 4y = 0, \quad x^2 + 16y^2 = 4.$$

a) Určete graficky přibližnou polohu všech řešení soustavy. Nejprve upravíme:

$$y = \frac{1}{4x}, \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$



b) Zvolte počáteční aproximaci $X^{(0)} = (-1, 0)^T$ a určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - 4y,$$

$$g(x, y) = x^2 + 16y^2 - 4.$$

$$f_x = -\frac{1}{x^2}, \quad f_y = -4, \quad g_x = 2x, \quad g_y = 32y$$

Soustava rovnic pro Δ_x, Δ_y v $A = X^{(0)}$ je

$$\left(\begin{array}{cc|c} f_x(A) & f_y(A) & -f(A) \\ g_x(A) & g_y(A) & -g(A) \end{array} \right)$$

tedy

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Řešení této soustavy tedy je

$$\Delta_x = -\frac{3}{2}, \Delta_y = (1 - \frac{3}{2})/(-4) = \frac{1}{8}.$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

B2. Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 10y = 1 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

a) *Určete interval maximálního řešení dané úlohy.*

Lineární ODR 2. řádu s konst. koeficienty a pravá strana také konstanta. Tedy $I = (-\infty, +\infty)$.

b) *Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.*

Nejprve převedeme na soustavu ODR

$$\begin{aligned} y_1 &= y, & y_1' &= y_2, \\ y_2 &= y', & y_2' &= 1 - y_2 - 10y_1 \end{aligned}$$

nebo $Y' = F(x, Y)$, $Y = (y_1, y_2)^T$ a

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ 1 - y_2 - 10y_1 \end{pmatrix}.$$

Collatzova metoda

$$x_0 = 0, Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h = 0.1$$

$$\mathbf{k}_1 = F(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{pom} = Y^{(0)} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.05 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.45 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = F(x_0 + h/2, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} -0.45 \\ 1 + 0.45 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.45 \\ -8.55 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -0.45 \\ -8.55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.955 \\ -0.855 \end{pmatrix}$$

Tedy vzhledem k tomu, že $Y = (y_1, y_2)^T = (y, y')^T$ máme

$$y'(1) = y_2(1) \approx -0.855$$

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x, t] : x \in (0, 1), t > 0\},$$

$$u(x, 0) = 2x + 1 \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ a } u(0, t) = \frac{1}{1+t}, \quad u(1, t) = 3 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Uveďte podmínky souhlasu pro danou úlohu a ověřte, zda jsou splněny.

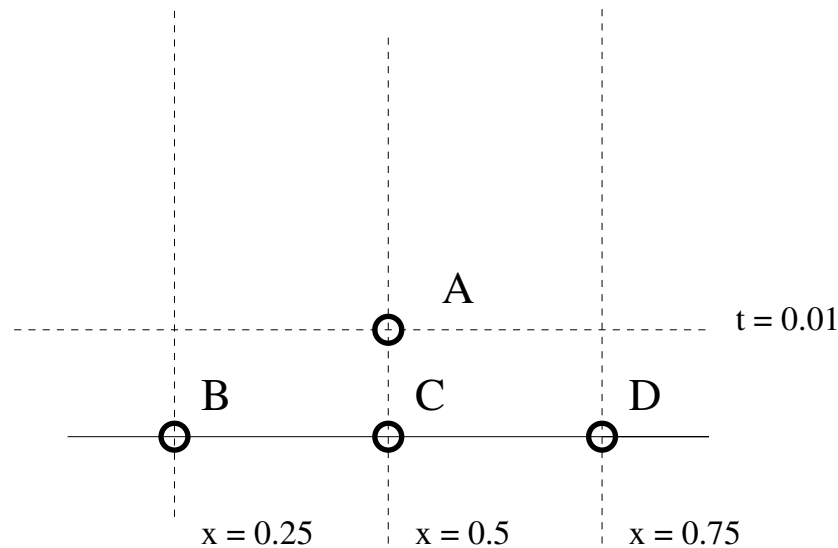
$$\text{Bod } x = 0, t = 0: \quad 2 \cdot 0 + 1 = u(0, 0) = \frac{1}{1 + 0} \quad (\text{splněno})$$

$$\text{Bod } x = 1, t = 0: \quad 2 \cdot 1 + 1 = u(1, 0) = 3 \quad (\text{splněno})$$

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu pro danou rovnici a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

$$\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 0.01}{0.25^2} = 0.32 \leq \frac{1}{2}$$

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).



$$U_A = 0.32U_B + 0.36U_C + 0.32U_D + 0.01 \cdot 0.5 \cdot 0$$

kde $U_B \approx u(0.25, 0)$, $U_C \approx u(0.5, 0)$, $U_D \approx u(0.75, 0)$ jsou hodnoty na nulté časové vrstvě dány počáteční podmínkou $(2x + 1)$. Tedy

$$U_B = 1.5, \quad U_C = 2, \quad U_D = 2.5$$

a

$$U_A = 0.32 \cdot (1.5) + 0.36 \cdot (2) + 0.32 \cdot (2.5) + 0.01 \cdot (0.5 \cdot 0) = 2.$$

B4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt,$$

$$u(x, 0) = 2x + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x - 1 \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \text{ a } u(0, t) = \frac{1}{1 + t}, \quad u(1, t) = 3 \text{ pro } t \geq 0.$$

- Podmínky souhlasu:

Poloha (u),

Rychlost (u_t)

$$\text{Bod } [0, 0]: \quad 2x + 1|_{x=0} = \mathbf{1} = \frac{1}{1+t}|_{t=0}, \quad x - 1|_{x=0} = -1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+t} \right) |_{t=0} = -(1+t)^{-2}|_{t=0}$$

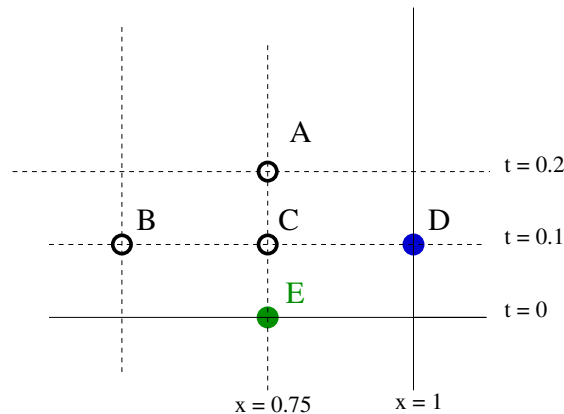
$$\text{Bod } [1, 0]: \quad 2x + 1|_{x=1} = \mathbf{3} = 3|_{t=0}, \quad x - 1|_{x=1} = \mathbf{0} = \frac{d}{dt}(3)|_{t=0}$$

- b) Podmínka stability pro $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$: ($\sigma \leq 1$)

$$\sigma^2 = \frac{2\tau^2}{h^2} = \frac{0.02}{0.25^2} = 0.32 \leq 1$$

- c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.2]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

Nakreslíme si obrázek:



Nultá časová vrstva:

$$U_E = u(0.75, 0) = 2.5$$

První časová vrstva:

$$U_B = (2 \cdot 0.5 + 1) + 0.1 \cdot (0.5 - 1) = 2 - 0.05 = 1.95$$

$$U_C = (2 \cdot 0.75 + 1) + 0.1 \cdot (0.75 - 1) = 2.5 - 0.025 = 2.475$$

Okrajová podmínka:

$$U_D = 3$$

Hodnota v bodě A:

$$U_A = 0.32U_B + (2 - 2 \cdot 0.32)U_C + 0.32U_D - U_E + 0.01(0.75 \cdot 0.1) = 2.45075$$