Numerická matematika A – 2.7.2015

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Je pro danou matici A Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte!

b) Je pro danou matici A Jacobiova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte!

c) Volte $X^{(0)} = \boldsymbol{b}$ a proveďte výpočet $X^{(1)}$ Jacobiovou iterační metodou.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 3y^3 = \sin(5\pi x) \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$

a) Označte $y(x)$ řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y)$, užijte vztah

$$y'(x + h/2) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

v bodě $x = x_n$, a odvoďte vzorec pro Collatzovu metodu. Užijte to, že y je řešením Cauchyovy úlohy, Taylorův rozvoj. Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte.

b) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

c) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

d) Volte $h = 0.1$ a určete přibližnou hodnotu řešení $y(0.1)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$-(2y')' + 4xy = 2 \qquad y(1) = 0, \ y(3) = -1$$

a) Ověřte, že daná okrajová úloha má právě jedno řešení. Zapište přesně všechny podmínky, které ověřujete.

b) Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro $h := \tilde{h}/2$ a výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm \tilde{h}/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady. Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru v uzlu x_n.

c) Volte krok $h = \frac{1}{2}$ a sestavte soustavu lineárních rovnic pro řešení dané úlohy metodou sítí.

A4. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \qquad u(x, 0) = 4x, \quad u(1, t) = \frac{8}{2 + t}, \quad u(5, t) = 2t + 20,$$

a) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$ při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Dosaďte tyto náhrady do dané rovnice a tuto upravte.

b) Ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny podmínky souhlasu. Rozhodněte, zda explicitní schéma bude stabilní pro volbu prostorového kroku $h = 1$ a časového kroku $\tau = 0.5$.

c) Volte $h = 1$ a $\tau = 0.5$ a pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [4, 0.5]$.

Numerická matematika B – 2.7. 2015

B1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\frac{1}{x} - 4y = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 4.$$

a) Určete graficky přibližnou polohu všech řešení soustavy.

b) Zvolte počáteční aproximaci $X^{(0)} = (-1, 0)^T$ a určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 10y = 1 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x, t] : x \in (0, 1),\ t > 0\},$$

$$u(x, 0) = 2x + 1 \text{ pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ a } u(0, t) = \frac{1}{1+t},\ u(1, t) = 3 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Uveďte podmínky souhlasu pro danou úlohu a ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu pro danou rovnici a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.5, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt,$$

$$u(x, 0) = 2x + 1,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x - 1 \text{ pro } x \in \langle 0, 1\rangle \text{ a } u(0, t) = \frac{1}{1+t},\ u(1, t) = 3 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.1$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.75, 0.2]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).