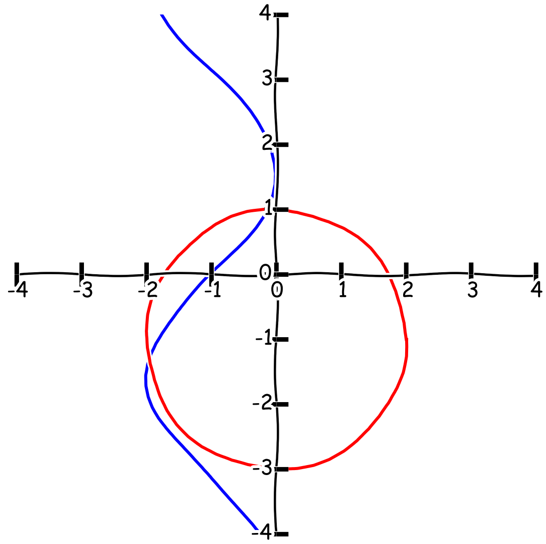
Numerická matematika A – 2.6.2016

A1. Zapíšeme si danou soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (y+1)^2 &= 4 \\ \sin y \; - \; x &= 1 \end{aligned}$$

a) *Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.* Nejprve si načrtneme obrázek, z kterého vidíme přibližnou polohu kořenů (průsečíky obou křivek)



b) Dále zapíšeme rovnice tečných rovin ke grafu funkce f a g v bodě $A = [x_k, y_k]$

$$z = f(A) + f_x(A)(x - x_k) + f_y(A)(y - y_k), \tag{1}$$
$$z = g(A) + g_x(A)(x - x_k) + g_y(A)(y - y_k), \tag{2}$$

kde f_x, f_y, g_x, g_y jsou příslušné parciální derivace.

V rovnici $f(x, y) = 0$ nahradíme funkci příslušnou rovnicí tečné roviny (tedy v rovnici tečné roviny položíme $z = 0$). Vyjádříme x a y tak aby obě rovnice byly splněny (toto řešení označíme x_{k+1}, y_{k+1}.

$$-f(A) = f_x(A)(x_{k+1} - x_k) + f_y(A)(y_{k+1} - y_k), \tag{3}$$
$$-g(A) = g_x(A)(x_{k+1} - x_k) + g_y(A)(y_{k+1} - y_k). \tag{4}$$

Označíme $\Delta_x = x_{k+1} - x_k$ a $\Delta_y = y_{k+1} - y_k$, danou soustavu rovnic vyřešíme a následně spočteme

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

nebo zapíšeme formálně jako

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x(A) & f_y(A) \\ g_x(A) & g_y(A) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

c) Volíme $\mathbf{X}^{(0)} = [0, 1]^T$. Pozor, zadané rovnice je nutné nejprve upravit odečtením pravé strany, tj.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + (y+1)^2 - 4, \\ g(x, y) &= \sin y \; - \; x \; - 1. \end{aligned}$$

Dále si spočteme parciální derivace funkcí f a g, tedy

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2(y+1), \qquad g_x = -1, \qquad g_y = \cos y.$$

Tyto parciální derivace a funkce f, g vyčíslíme v bodě $\mathbf{X}^{(0)}$ a sestavíme soustavu lineárních rovnic (viz b)), tedy

$$\begin{aligned} -(1+1-4) &= 2\Delta_x + 2\Delta_y, && (5)\\ -(0-1-1) &= -1\Delta_x + 1\Delta_y. && (6) \end{aligned}$$

nebo-li

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

tedy řešení je $\Delta_x = \frac{3}{2}$, $\Delta_y = -\frac{1}{2}$. Nové přiblížení (aproximace) tedy je

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

A2.

$$y''' + y\,y'' + 1 - (y')^2 = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

a) Rovnici zapíšeme jako

$$y''' = -y\,y'' - 2 + (y')^3,\ \text{nebo}\ y''' = g(x, y, y', y''),$$

kde $g(x, y', y'') = -y\,y'' - 2 + (y')^3$. Užijeme substituci

$$\begin{aligned} z_1 &= y, & z_1' &= z_2 \\ z_2 &= y', & z_2' &= z_3 \\ z_3 &= y'', & z_3' &= -z_1\,z_3 - 1 + z_2^2, \end{aligned}$$

nebo $Z = F(x, Z)$, kde $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$ a

$$F(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -z_1\,z_3 - 2 + z_2^3 \end{pmatrix}$$

b) Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané úlohy jsou spojitost funkce g, g_y, $g_{y'}$,$g_{y''}$. Vidíme, že funkce g a parciální derivace

$$g_y = -y'', \qquad g_{y'} = 3(y')^2, \qquad g_{y''} = -y$$

jsou spojité pro libovolný argument $[x, y, y', y'']$, tedy hledaná oblast je

$$G = \{[x, y, y', y''] \in \mathbb{R}^4\}.$$

c)

$$x_0 = 0, h = 0.2, Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dále

$$\boldsymbol{k}_1 = F(0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0 - 2 + 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F(0.1, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ -0 - 2 + 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ -1.999 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ -1.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.16 \\ 0.6002 \end{pmatrix}$$

A3.

a) Náhrady v uzlu $P_i^k = [x_i, k\tau]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2},$$

kde $U_i^k \approx u(P_i^k)$, Dosazením do rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

v uzlu P_i^k dostaneme

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(x_i, \tau_k)$$

Vynásobením τ^2 dostaneme

$$U_i^{k+1} = c^2\tau^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} - U_i^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f(x_i, \tau_k).$$

Označíme $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + 2\left(1 - \sigma^2\right) U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

Pro první časovou vrstvu ($t_1 = \tau$):

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \mathcal{O}(\tau^2),$$

a po zanedbání $\mathcal{O}(\tau^2)$

$$U_i^1 = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0),$$

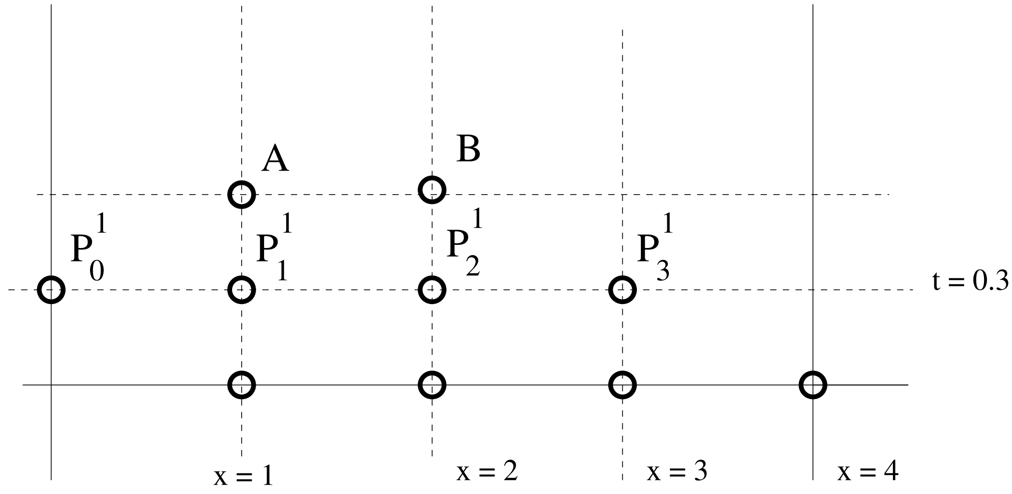
kde za u a $\frac{\partial u}{\partial t}$ dosadíme z poč. podm, tedy

$$U_i^1 = x_i(4 - x_i) + \tau\, 0,$$

b) Volba $h = 1, \tau = 0.3, c = 3$ dává $\sigma = \frac{c\tau}{h} = 0.9 \le 1$, tedy podmínka stability je splněna.

Hodnoty na nulté a první časové vrstvě jsou stejné

x_i	0	1	2	3	4
U_i^0	0	3	4	3	0
U_i^1	0	3	4	3	0



c) $c = 3, \sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2} = 0.81$

$$U_A = 0.81(U_0^1 + U_2^1) + 2(1-0.81)U_1^1 - U_1^0 + 0.09 \cdot 0.3 = 0.81 \cdot 4 + 0.18 \cdot 3 - 3 + 0.027 = 1.407$$
$$U_B = 0.81(U_1^1 + U_3^1) + 2(1-0.81)U_2^1 - U_2^0 + 0.09 \cdot 0.3 = 0.81 \cdot 6 + 0.18 \cdot 4 - 4 + 0.027 = 2.407$$

A4.

a) Použéjeme
$$z'(x) = \frac{z(x+h) - z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$
pro $h := h/2$ a $z(x) = p(x)y'(x)$. Tedy
$$z'(x_n) = (p(x)y'(x))'\,|_{x=x_n} \approx \frac{p(x_n - h/2)y'(x-h/2) - p(x_n + h/2)y'(x+h/2)}{2\frac{h}{2}}$$
kde označíme $p_{n\pm1/2} = p(x \pm h/2)$. Dále pak
$$y'(x_n - h/2) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \qquad y'(x_n + h/2) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$
Tedy
$$(p(x)y'(x))'\,|_{x=x_n} \approx \frac{1}{h^2}\left[p_{n-1/2}y_{n-1} - \left(p_{n-1/2} + p_{n+1/2}\right)y_n + p(n+1/2)y_{n+1}\right].$$
Náhrada rovnice v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ v uzlu x_n pak je po úpravě
$$-p_{n-1/2}y_{n-1} + \left(p_{n-1/2} + p_{n+1/2} + h^2 q(x_n)\right)y_n - p_{n+1/2}y_{n+1} = h^2 f(x_n)$$
případně označíme $q_n = q(x_n)$ a $f_n = f(x_n)$.

b) Pro rovnici v samoadjungovaném tvaru $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ postačující podmínky existence řešení Dirichletovy úlohy jsou:

(i) Spojitost funkcí $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ a $f(x)$ na celém intervalu $\langle a, b\rangle$.

(ii) Dále $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Vidíme, že funkce $p(x) = x, p'(x) = 1, q(x) = (x-1), f(x) = -1$ jsou spojité na daném intervalu. Navíc $p(x) > 0$, a $q(x) \geq 0$ pro $x \in \langle 1, 5\rangle$.

c) Nejprve vypočteme hodnoty funkcí p a q (f - je konstantní).

$x_{i\pm h/2}$	1.5	2.5	3.5	4.5
$p(x_i \pm h/2)$	1.5	2.5	3.5	4.5

x_i	2	3	4
$q(x_i)$	1	2	3

Sestavíme soustavu rovnic
$$\begin{pmatrix} (1.5+2.5+1) & -2.5 & 0 \\ -2.5 & (2.5+3.5+2) & -3.5 \\ 0 & -3.5 & (3.5+4.5+3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1.5\cdot 1 \\ -1 \\ -1+4.5\cdot 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 8 & -3.5 \\ 0 & -3.5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \mathrm{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Numerická matematika B – XX.X.2015

B1.

x_i	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y_i	2.8	3.0	2.1	2.1	3.9	4.2	3.6	3.8

a) Z tabulky hodnot vypočteme

$$\sum_i 1 = 8, \qquad \sum_i x_i = 4, \qquad \sum_i x_i^2 = 12,$$

$$\sum_i y_i = 25.5, \qquad \sum_i x_i y_i = 17.1,$$

a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.5 \\ 17.1 \end{pmatrix}$$

b) Řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 25.5 \\ 4 & 12 & 17.1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 25.5 \\ 0 & 10 & 4.35 \end{array} \right)$$

Tedy dostaneme řešení $(2.97, 0.435)^T$, tj. koeficienty $a_0 = 2.97$ a $a_1 = 0.435$. Optimální polynom $p_1^*(x)$ je dán

$$p_1^*(x) = 2.97 + 0.435\,x.$$

B2.

a) Rovnice je lineární, nemusíme tedy vyšetřovat parciální derivace dle y, a y'. Stačí spojitost koeficientů, která je splněna pokud $x \neq 0$. Vzhledem k poč. podmínce zadané pro $x = -3$ je tedy $I = (-\infty, 0)$

b)

$$\begin{array}{lll} z_1 = y, & z_1' = z_2, & z_1(-3) = 1 \\ z_2 = y' & z_2' = 2\frac{z_1}{x^2}, & z_2(-3) = 1 \end{array}$$

c) Vidíme: $x_0 = -3,\ h = 1,\ Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2, \\ 2\frac{z_1}{x^2}, \end{pmatrix} \qquad Z = (z_1, z_2)^T.$$

Počítáme

$$\boldsymbol{k}_1 = f(x_0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(x_0 + h/2, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ 0.48 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\overline{11} \\ 1.48 \end{pmatrix}$$

B3. **a)** Podmínky souhlasu:
v $x = 0, t = 0$: počáteční $u(0,0) = -4$, okrajová $u(0,0) = -4$ v $x = 1, t = 0$: počáteční $u(1,0) = 6$, okrajová $u(1,0) = 6$

b) Podmínka stability: $\dfrac{p\tau}{h^2} \leq \dfrac{1}{2},\ p = \dfrac{1}{2},\ h = 0.1,\ \tau = 0.01 \Rightarrow \dfrac{0.5 \cdot 0.01}{0.01} = 0.5$ je splněna.

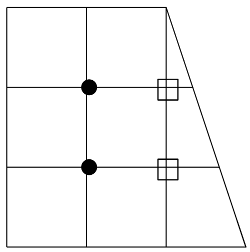
c) Označme $U_i^n \approx u(ih, n\tau)$, potom

$$U_A = \frac{1}{2}\left(U_7^1 + U_9^1\right) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.8 = \frac{1}{2}(3.014 + 5.018) + 0.016 = 4.032$$

$$U_7^1 = \frac{1}{2}\left(U_6^0 + U_8^0\right)) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.7 = 3.014$$

$U_9^1 = \dfrac{1}{2}\left(U_8^0 + U_{10}^0\right) + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.9 = 5.018$
$U_6^0 = 2,\ U_8^0 = 4,\ U_{10}^0 = 6$

B4. a) Regulární :$\bullet$, neregulární : $\square$



b) Na $y = 1$ leží jeden regulární a jeden neregulární:
regulární: $4U_{[0.5,\ 1]} - U_{[1,\ 1]} - U_{[0.5,\ 0.5]} = 1 + 0 + 0.25 = 1.25$,
neregulární: $\delta = \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}U_{[1,1]} - \dfrac{2}{3}U_{[0.5,\ 1]} = 1$