Numerická matematika A – 2.6.2016

A1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + (y+1)^2 &= 4 \\ \sin y - x &= 1 \end{aligned}$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.

b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ a $g(x, y)$ v bodě $X^{(k)} = [x_k, y_k]$. Rovnice $f(x, y) = 0$ a $g(x, y) = 0$ aproximujte v bodě $[x_k, y_k]$ příslušnou rovnicí tečné roviny a odvoďte soustavu rovnic pro výpočet nového přiblížení $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ Newtonovou iterační metodou!

c) Zvolte $X^{(0)} = [1, 0]^T$ a Newtonovou metodou spočtěte $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' + yy'' + 2 - (y')^3 = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

a) Danou rovnici převeďte na soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

b) Určete oblast, ve které jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $y(0.2)$ a $y'(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici: Hledáme funkci $u(x, t)$ takovou, že platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t,$$

a jsou splněny počáteční a okrajové podmínky $u(x, 0) = x(4 - x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ pro $x \in \langle 0, 4\rangle$,
$u(0, t) = 0$, $u(4, t) = 0$ pro $t \geq 0$.

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v regulárním uzlu P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Volte krok $h = 1$, časový krok $\tau = 0.3$ a nakreslete síť. Ověřte, zda je pro tuto volbu explicitní schéma stabilní! Určete hodnoty aproximací ve všech uzlech sítě na nulté a první časové vrstvě.

c) Užitím explicitního schématu určete přibližnou hodnotu v bodech $A = [1, 0.6]$ a $B = [2, 0.6]$.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(xy'\right)' + (x-1)\,y = -1 \qquad y(1) = 1, y(5) = 2.$$

a) Užijte náhradu $z' = \frac{z(x+h)-z(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ v uzlu $x = x_n$ pro $h := \tilde{h}/2$ a výraz $z(x) = p(x)y'(x)$. Následně hodnoty $y'(x_n \pm h/2)$ aproximujte opět užitím této náhrady.
Členy $\mathcal{O}(h^2)$ zanedbejte a odvoďte diferenční náhradu rovnice v samoadjungovaném tvaru.

b) Ověřte, že existuje právě jedno řešení dané úlohy. Uveďte všechny podmínky, které jste ověřili!

c) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro danou úlohu.

Numerická matematika B – 2.6.2016

B1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y_i	2.8	3.0	2.1	2.1	3.9	4.2	3.6	3.8

a) Pro danou tabulku hodnot sestavte soustavu normálních rovnic pro určení koeficientů polynomu nejvýše 1. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců. Soustavu rovnic zapište v maticovém tvaru.

b) Soustavu z a) vyřešte a určete polynom $p_1^*(x)$ nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje zadaná data.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = 2\frac{y}{x^2}, \quad y(-3) = 1, \quad y'(-3) = 1,$$

a) Určete interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y(-2)$ a $y'(-2)$.

B3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \qquad u(x,0) = 10x - 4, \quad u(0,t) = t - 4, \quad u(1,t) = \frac{6}{1+t},$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu.

b) Uveďte podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = 2xy$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1.5,0], [1,1.5], [0,1.5]$, kde na hranici je předpsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2y$.

a) Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 0.5$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.