Numerická matematika A – 1.6.2017

A1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ y &= \mathrm{arctg} x \end{aligned}$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.

b) Pro obecnou soustavu rovnic $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$ odvoďte soustavu rovnic pro výpočet nového přiblížení $X^{m+1} = [x_{m+1}, y_{m+1}]$ z $X^m := A = [x_m, y_m]$ pomocí Newtonovy iterační metody!

c) Zvolte $X^{(0)} = [0, 2]^T$ a Newtonovou metodou spočtěte $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1^2 + 2y_2 + x, \qquad y_1(0) = -2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2^2, \qquad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

a) Pro rovnici $y' = f(x, y)$ zapište vzorec obecné jednokrokové metody pro výpočet aproximace y_{n+1}. Je Collatzova metoda příkladem jednokrokové metody? Pokud ano, zapište jaký tvar má přírůstková funkce $\Phi(x, y, h)$.

b) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.2)$ užitím Eulerovy metody.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(0.2)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{10}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x, t] : x \in (0, 2),\ t > 0\},$$

$$u(x, 0) = \frac{24}{1+x} \text{ pro } x \in \langle 0, 2\rangle, \qquad u(0, t) = \frac{48}{2+t},\ u(2, t) = 9 - \frac{1}{1+t} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu pro danou úlohu.

b) Odvoďte implicitní schéma pro výpočet hodnot aproximací na $k + 1$-ní časové vrstvě z hodnot na $k-$té časové vrstvě. Uveďte také, jak se v dané rovnici nahradí příslušné parciální derivace v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_k]$. Stručně vysvětlete význam všech symbolů!

c) Volte prostorový krok $h = \frac{1}{2}$ a časový krok $\tau = 1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu. Uveďte, zda je splněna podmínka stability schématu!

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(\left(\frac{9-2x}{2}\right)y'\right)' + x\,y = 4 \qquad y(0) = 0, y(4) = 1.$$

a) Ověřte zda existuje jediné řešení dané Dirichletovy úlohy? Uveďte stručně všechny podmínky, které ověřujete!

b) Odvoďte diferenční náhradu obecné diferenciální rovnice 2. řádu v samoadjungovaném tvaru. Návod: Užijte náhrady $z'(x) \approx (z(x + h/2) - z(x - h/2))/h$!

c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$.

Numerická matematika B – 1.6.2017

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Jacobiho iterační metoda konvergentní!

b) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní!

c) Určete přiblížení $X^{(1)}$ užitím Jacobiho iterační metody při volbě $X^{(0)} = B$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + y^3 = x, \qquad y(2) = 0, \qquad y'(2) = 1$$

a) Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu diferenciálních rovnic.

b) Volte krok $h = 0.4$. Eulerovou explicitní metodou určete přibližně hodnotu přesného řešení $y(2.4)$.

c) Volte krok $h = 0.4$. Collatzovou metodou určete přibližné hodnotu řešení $y'(2.4)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (1,2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 1 + x \text{ pro } x \in \langle 1, 2\rangle \text{ a } u(1,t) = \frac{4}{2+100t},\ u(2,t) = \frac{2}{1+t} + 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability. Ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[1.25, 0.02]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = x^2 - y^2$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1,0], [1,-\frac{4}{3}], [0,-1]$, kde na hranici je předpsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2y + x$.

a) Je dán krok $h = \frac{1}{3}$. Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Pro dané h sestavte síťové rovnice v regulárních uzlech!

c) Sestavte síťové rovnice v jednom z neregulárních uzlů. Užijte lineární interpolaci!