Eliptická rovnice. Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici.

$$\triangle u = f(x,y), \qquad \text{v } \Omega \subset R^2, \qquad u(x,y) = u_D(x,y), \quad \text{pro } [x,y] \in \partial\Omega.$$

- V regulárním uzlu: $4U_{ij} - U_{i-1j} - U_{i+1j} - U_{ij-1} - U_{ij+1} = -h^2 f_{ij}$,
- V neregulárním uzlu: $(1+\delta)U_N - \delta U_R = \varphi(Q)$

Parabolické rovnice. Rovnice vedení tepla.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad \sigma = \frac{p\tau}{h^2}$$

- Explicitní schéma: $U_i^{k+1} = (1-2\sigma)U_i^k + \sigma(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) + \tau f_i^k \qquad , \sigma \le 1/2$,
- Implicitní schéma: $-\sigma U_{i+1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_{i-1}^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1}, \qquad \sigma \ge 0$

Hyperbolické rovnice. Vlnová rovnice.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad \sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$$

- Explicitní schéma: $U_i^{k+1} = 2(1-\sigma^2)U_i^k + \sigma^2(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k, \qquad \sigma \le 1$
- Implicitní schéma: $(1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{\sigma^2}{2}(U_{i-1}^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}) = -(1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{\sigma^2}{2}(U_{i-1}^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}) + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$, $\sigma \ge 0$
- Náhrada na 1. časové vrstvě: $u(x_i,\tau) = u(x_i,0) + \tau u_t(x_i,0) + O(\tau^2)$

32a) Nechť funkce $y(x)$ je dostatečně hladká na dostatečném okolí bodu x_0. Zapište Taylorův rozvoj v bodě x_0 funkce y (zapište členy až do 3. derivace včetně a chybu Taylorova polynomu označte $O(h^4)$).

$$y(x) = y(x_0) + \qquad\qquad\qquad\qquad + \dots$$

b) Užitím a) Taylorův rozvoj v bodě $x = x_0 + h$ a $x = x_0 - h$,

$$y(x_0+h) = \qquad\qquad , y(x_0-h) =$$

c) Dosaďte b) do rovnic a odvoďte dopřednou a zpětnou diferenci jako náhradu 1. derivace.

$$y(x_0+h) - y(x_0) = \qquad\qquad , y(x_0) - y(x_0-h) = \qquad\qquad .$$

d) Dosaďte b) do rovnic a odvoďte 1. resp 2.centrální diferenci jako náhradu 1. resp. 2. derivace.

$$y(x_0+h) - y(x_0-h) = \qquad\qquad , y(x_0+h) + y(x_0-h) = \qquad\qquad ,$$

35.a) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}(y(x-h) - 2y(x) + y(x+h))$ aproximací $y''(x_i)$ 2.řádu

b) Odvoďte diferenční schema pro řešení Poissonovy rovnice $\triangle u = f$ metodou sítí v regulárních uzlech

36. a) Zapište maticově soustavu síťových rovnic, která vznikne při řešení rovnice $\Delta u = 0$ na čtyřúhelníku $[-1;0]$, $[1.5;0]$, $[0;1.5]$, $[-1;1.5]$ s krokem $h = 0.5$. Na hranici je $u(x,y) = y$

b) Ověřte, že danou soustavu lze řešit Jacobiho iterační metodou (tj. zda je metoda konvergentní).

37. a) Nakreslete oblast Ω čtyřúhelník s vrcholy $[0;0]$, $[2;0]$, $[1.5;1.5]$, $[0;1.5]$. Nakreslete sít̆ s krokem $h = 0.5$, zakreslete všechny sít̆ové přímky a všechny sít̆ové uzly, které leži v oblasti Ω. V obrázku označte regulární uzly, hraniční uzly a neregulární uzly.

b) Odvod'te tvar sít'ové rovnice v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace a ukažte, že je aproximací 2.řádu přesnosti metodou

c) Sestavte sít̆ové rovnice ve všech uzlech ležících na přímce $y = 0.5$.

39. Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = x(y+1)$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0;0]$, $[1.8;0]$, $[0;1.5]$ a $[1.5;1.5]$. s okrajovou podmínkou $u(x,y) = x + y$ na hraniciΓ.

a) Volte $h = 0.5$, nakreslete obrázek oblasti, zobrazte všechny sít̆ové čáry, sít̆ové uzly uvnitř oblasti, regulární neregulární a hraniční uzly, číslování uzlů.

b) Sestavte sít'ové rovnice, v neregulárních uzlech užijte lineární interpolace.

40. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x) \text{ pro } x \in \langle 0; l\rangle, \qquad (0,t) = \alpha(t), \qquad u(l,t) = \beta(t), t \geq 0$$

a) Co jsou podmínky souhlasu?

b) Odvod̆te explicitní a implicitní schema. Jakého řádu přesnosti jsou tato schemata? Kdy jsou stabilní?

41.a) Je dána smíšená úloha v oblasti $\Omega = \{[x;t] : x \in (0;1);\ t > 0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t$$

$$u(x,0) = x^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle, \qquad u(0,t) = \operatorname{arctg}(t), \qquad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

b) Ověřte splnění podmínek souhlasu

c) Určete τ a minimální krok h tak, aby při jejím řešení stabilní explicitní metodou ležel bod $P = [0.25; 0.1]$ v prvé časové vrstvě

d) Pro hodnoty τ a h z bodu (b) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

e) Při $h = \tau = 0.25$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu užitím implicitní formule

42.a) Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;2);\ t > 0\}$$

b) Př zadaných podmínkách

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(2-x) \quad \text{pro } x \in \langle 0; 2\rangle \\ u(0,t) &= 30t \quad \text{pro } t \geq 0 \\ u(2,t) &= 0 \quad \text{pro } t \geq 0 \end{aligned}$$

sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1.0$ aby pro daný krok v ose x bylo užité schema stabilní

43.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\sin t$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) &= 1\ , \quad u(1,t) = \cos t \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Odvoďte explicitní schema a síťové rovnice pro první časovou vrstvu.

c) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$

d) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$.

44.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-1)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1-x)^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ u(0,t) &= \sin t\ , \quad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu.

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

45.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1 - x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{pro } x \in \langle 1; 2\rangle \\ u(1,t) &= 0\ , \quad u(2,t) = \frac{-3}{t^2+1} \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.25$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [1.5; 1]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

46.a) Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \text{v oblasti } \Omega = (a; b) \times (0; \infty)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in \langle a; b\rangle \\ u(a,t) &= \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t) \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ implicitní metodou.