Řešení okrajové úlohy pro ODR

- ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru,

$$-\Big(p(x)y'\Big)' + q(x)y = f(x), \text{ pro } x \in (a,b),$$

- PP: $p, p', q, f \in C([a,b])$, $p > 0$, $q \geq 0$, (vyjma případu Neumann a $q \equiv 0$)
- diferenční náhrada,

$$-p_{i-1/2}Y^{i-1} + \Big(p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2 q_i)Y^i - p_{i+1/2}Y^{i+1} = f_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

- Dirichletovy okrajové podmínky: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$
- Neumannova okrajová podmínka: $y'(b) = \beta$, 1. řád

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{h} = \beta$$

- Neumannova okrajová podmínka: $y'(a) = \alpha$, 1. řád

$$\frac{Y^1 - Y^0}{h} = \alpha$$

32a) Nechť funkce $y(x)$ je dostatečně hladká na dostatečném okolí bodu x_0. Zapište druhou centrální diferenci.

b) Označme $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorec d) pro aproximaci derivace funkce $z(x)$ v bodě x_0.

$$(py')' = \frac{1}{2xh/2}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

c) Užijte značení z b), tedy $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorce d) pro aproximaci $y'(x)$, a odvoďte vzorce pro náhradu

$$p(x_0 + h/2)y'(x_0 + h/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

$$p(x_0 - h/2)y'(x_0 - xh/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

d) Označte $x_i = a + i\,h$ ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme (přibližné) hodnoty funkcí v bodech x_i jako $y_i = y(x_i)$, $p_{i\pm1/2} = p(x_i \pm h/2)$, $q_i = q(x_i)$ a $f_i = f(x_i)$. Kombinací vzorců z b) a c) odvoďte diferenční náhradu samoadjungované rovnice v bodě x_i.

33. Převeďte Dirichletovu okrajovou úlohu na samoadj. tvar, a ověřte předpoklady pro existenci a jednoznačnst řešení.

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}, \qquad y(-5) = -2, y'(-3) = 1$$

Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.4$

34 a) Zapište postačující podmínky pro existenci řešení Dirichletovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru (t.j. $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$).

b) Dána Dirichletova úloha

$$y'' - 2y' + (x - \alpha)y = e^{2x}, \quad y(1) = 0, y(2) = 1.$$

Rovnici zapište v samoadjungovaném tvaru. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in R$, pro které jsou uvedené podmínky (viz a) splněny

(c) Zapište rovnice pro řešení dané úlohy pomocí metody sítí. Pro $h = 0.2$ a $\alpha = 5$ zapište 1. rovnici (tj. v bodě $x = 1.2$) ze soustavy rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí.

Řešení okrajové úlohy pro ODR

- ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru,

$$-\Big(p(x)y'\Big)' + q(x)y = f(x), \text{ pro } x \in (a,b),$$

- PP: $p, p', q, f \in C([a,b])$, $p > 0$, $q \geq 0$, (vyjma případu Neumann a $q \equiv 0$)
- diferenční náhrada,

$$-p_{i-1/2}Y^{i-1} + \Big(p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2 q_i)Y^i - p_{i+1/2}Y^{i+1} = f_i, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

- Dirichletovy okrajové podmínky: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$
- Neumannova okrajová podmínka: $y'(b) = \beta$, 1. řád

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{h} = \beta$$

- Neumannova okrajová podmínka: $y'(a) = \alpha$, 1. řád

$$\frac{Y^1 - Y^0}{h} = \alpha$$

32a) Nechť funkce $y(x)$ je dostatečně hladká na dostatečném okolí bodu x_0. Zapište druhou centrální diferenci.

b) Označme $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorec d) pro aproximaci derivace funkce $z(x)$ v bodě x_0.

$$(py')' = \frac{1}{2xh/2}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\quad)$$

c) Užijte značení z b), tedy $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorce d) pro aproximaci $y'(x)$, a odvoďte vzorce pro náhradu

$$p(x_0 + h/2)y'(x_0 + h/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\quad)$$

$$p(x_0 - h/2)y'(x_0 - xh/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\quad)$$

d) Označte $x_i = a + i\,h$ ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme (přibližné) hodnoty funkcí v bodech x_i jako $y_i = y(x_i)$, $p_{i\pm1/2} = p(x_i \pm h/2)$, $q_i = q(x_i)$ a $f_i = f(x_i)$. Kombinací vzorců z b) a c) odvoďte diferenční náhradu samoadjungované rovnice v bodě x_i.

33. Převeďte Dirichletovu okrajovou úlohu na samoadj. tvar, a ověřte předpoklady pro existenci a jednoznačnst řešení.

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}, \qquad y(-5) = -2, y'(-3) = 1$$

Napište první dvě rovnice soustavy síťových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.4$

34 a) Zapište postačující podmínky pro existenci řešení Dirichletovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru (t.j. $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$).

b) Dána Dirichletova úloha

$$y'' - 2y' + (x - \alpha)y = e^{2x}, \quad y(1) = 0, y(2) = 1.$$

Rovnici zapište v samoadjungovaném tvaru. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in R$, pro které jsou uvedené podmínky (viz a) splněny

(c) Zapište rovnice pro řešení dané úlohy pomocí metody sítí. Pro $h = 0.2$ a $\alpha = 5$ zapište 1. rovnici (tj. v bodě $x = 1.2$) ze soustavy rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí.