- **Cauchyova úloha pro ODR 1. řádu**

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

- Existence a jednoznačnost řešení: MA3
- Numerická aproximace: v bodech $x_n = x_0 + n\,h$, h - krok metody $y(x_n) \approx Y^n$,
- **explicitní Eulerova metoda:**

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + h\,\underbrace{\mathbf{f}(x_n, Y^n)}_{\mathbf{k}} \tag{2}$$

- **implicitní Eulerova metoda:**

$$\mathbf{Y}^{n+1} - h\mathbf{f}(x_{n+1}, Y^{n+1}) = \mathbf{Y}^n \tag{3}$$

- **Collatzova metoda**

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{n+1} &= \mathbf{Y}^n + h\mathbf{k}_2, \qquad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_{pom}), \\ \mathbf{Y}_{pom} &= \mathbf{Y}^n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \qquad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{4}$$

- **Řád metody:**

$$|y(x_n) - Y^n| \approx Ch^p \equiv O(h^p),$$

  Eulerova metoda: $p = 1$, Collatzova metoda $p = 2$, Runge-Kutta 4-kroková (K4) - 4. řádu,

- **Vektorová rovnice:** Rovnice (1) je možné chápat i jako vektorovou rovnici, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ a $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, tedy

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

  Pak ve vzorcích (2) a (4) označují $\mathbf{Y}^n$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ také vektory.

- **Cauchyova úloha pro rovnici vyššího řádu:**

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad y(x_0) = y_0, \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

  Rovnici převedeme na systém **substitucí** $z_1 = y, z_2 = y', z_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ a zapsáním rovnic postupně pro

$$z_1' = \ldots$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1}' = \ldots,$$

18. Je dána Cauchyova úloha

$$y' = xy^2, \qquad y(1) = -1$$

a) Zapište interval jejího maximálního řešení.

b) Určete s krokem $h = 0.5$ pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody přibližnou hodnotu řešení $y(1.5)$.

c) Určete s krokem $h = 0.5$ pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení $y(1.5)$ a $y(2)$.

d) Která z metod by měla být přesnější? Zdůvodněte.

19. Je dána Cauchyova úloha

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -40 & 1 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = (1,0)^T$$

a) Zapište interval jejího maximálního řešení.

b) Určete s krokem $h = 0.5$ pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody přibližnou hodnotu řešení $y(0.5)$.

20. Je dána Cauchyova úloha

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -\ln \frac{x}{y_2} - 2\sqrt{x+4} \end{pmatrix}. \qquad y(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti.

b) Určete s krokem $h = 0,5$ pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = -1,5$.

21. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + \frac{1}{3-x} y' = \sqrt{x+3}, \qquad y(-2) = 1,\ y'(-2) = 5,$$

a) Zapište interval jejího maximálního řešení.

b) Určete s krokem $h = 0,2$ pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = -1,8$.

22. Je dána Cauchyova úloha

$$y'(y-4) = x + \sqrt[3]{1-y} \qquad y(3) = 2$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

b) Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu $y(3.2)$ s krokem $h = 0.2$

23. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2 + \ln(x-1) + 1 \\ x\sqrt{4-y_1} - 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

b) Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2.1$ s krokem $h = 0.1$

24. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -\ln \frac{x}{y_2} - 2\sqrt{x+4} \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

b Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = -1.5$ s krokem $h = 0.5$

25. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1 \mathrm{tg} x + y_3 - 2 \\ y_1 + y_2 \ln(x+1) \\ y_1 + 2y_2 - \frac{1}{x-2} y_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ověřte, že Cauchyova úloha má právě jedno řešení

b) Zapište interval $\mathcal{I}$ jejího maximálního řešení

c) S krokem $h = 0.2$ určete přibližnou hodnotu $\vec{y}(1.2)$ pomocí Eulerovy metody