LU rozklad: $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$,

I. Provedeme rozklad $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ na dolní (L) a horní(U) trojúhelníkovou matici, $l_{ii} = 1$.

II. Řešíme soustavu ve dvou krocích, I. $\mathbb{L}y = b$, II. $\mathbb{U}x = y$

Norma matice a vektoru

- Řádková norma $\|\mathbb{A}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ $\qquad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|$
- Sloupcová norma $\|\mathbb{A}\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$ $\qquad \|\vec{x}\|_\ell = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- Euklidovská norma $\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- Vztahy $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

- $\mathbb{A}$ je **diagonálně dominantní** (DD) v řádcích, pokud $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad \forall i$
- $\mathbb{A}$ je **diagonálně dominantní** (DD) ve sloupcích, pokud $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \qquad \forall i$
- **ostře diagonálně dominantní** (ODD) v řádcích/sloupcích, pokud platí ostrá nerovnost.
- $\mathbb{A}$ je **ireducibilně/nerozložitelně diagonálně dominantní** (IDD), pokud nerozložitelná, DD, a aspoň v jednom řádku platí ostrá nerovnost.
- Obdobně lze **DD/ODD** ve sloupcích
- $\mathbb{A}$ je **pozitivně definitní** pokud $x^T Ax > 0$ pro $x \neq 0$.
- **Symetrická poz. definitní (SPD)** právě když je sym. a má všechny hlavní minory kladné.
- **Spektrální poloměr** matice $\mathbb{A}$: $\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ je vlastní číslo } \mathbb{A}\}$

Prostá iterační metoda: $X^{(k+1)} = \mathbb{U}X^{(k)} + V$ pro soustavu $\qquad x = \mathbb{U}x + V$.

- **Nutná a postačující podmínka**: konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|\mathbb{U}\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní.
- **Odhad**: Je-li $\|\mathbb{U}\| < 1$ (pozn. lze i pro $\rho(\mathbb{U})$), pak

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|}{1 - \|\mathbb{U}\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad \text{nebo} \quad \|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|^k}{1 - \|\mathbb{U}\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Jacobiho metoda $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

- **Nutná a postačující podmínka**: konvergentní $\Leftrightarrow \rho(\mathbb{U}_J) < 1$.
- **Postačující podmínka**: matice A ODD/IDD, pak metoda je konvergentní.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_J = -\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{P})$ jsou kořeny rovnice $\det(\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$

Gauss-Seidelova iterační metoda $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

- **Postačující podmínka**: Je-li $\mathbb{A}$ ODD/IDD, pak metoda je konvergentní.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\mathbb{A}$ SPD, pak metoda je konvergentní.
- **Nutná a postačující podmínka**: konvergentní $\Leftrightarrow \rho(\mathbb{U}_{GS}) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_{GS} = -(\mathbb{D}+\mathbb{L})^{-1}\mathbb{P}$ jsou kořeny rovnice $\det(\lambda\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$.

Superrelaxační metoda $x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

- **Postačující podmínky**: Je-li $\mathbb{A}$ ODD, $\omega \in (0,1]$, pak metoda je konvergentní.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\mathbb{A}$ SPD, $\omega \in (0,2)$, pak metoda je konvergentní.

Gradientní metoda

- **Předpoklady:** Matice A SPD. Definujme $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot(\mathbb{A}\mathbf{x}) - \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}$.
- **Ekvivalence:** $(\quad \mathbb{A}x^* = \mathbf{b} \quad) \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(\mathbf{x}^*) \le F(\mathbf{x}) \qquad \text{pro libovolné } \mathbf{x})$.
- **Gradientní metoda:** $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}$
- **Směr (největší spád):** $\mathbf{p} = -\operatorname{grad} F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}$.
- **Optimální krok ve směru p** $\alpha = \operatorname{argmin}_\alpha F\big(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}\big) = \frac{\mathbf{p}^T(\mathbf{b}-\mathbb{A}\mathbf{x})}{\mathbf{p}^T\mathbb{A}\mathbf{p}}$

Prostá iterační metoda Řešíme iteračně rovnici $x = F(x)$ předpisem $x^{k+1} = F(x^k)$, kde $F: R^n \to R^n$. Metoda konverguje pokud je F kontraktivní, např. pokud Jacobiho matice $F'(x)$ je v normě menší než jedna.

Newtonova metoda Rovnici $F(x) = 0$ řešíme iteračně $x^{k+1} = x^k - (F'(x^k))^{-1}F(x^k)$, kde $F: R^n \to R^n$ a $F'(x^k)$ je Jacobiho matice F.

Pro $n = 2$,

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

kdeΔ_x, Δ_y řeší rovnice

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + f_y(A)\Delta_y &= f(A) \\ g_x(A)\Delta_x + g_y(A)\Delta_y &= g(A) \end{aligned}$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců: Pro $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ a tabulku $[x_i, y_i]$

- Princip: minimalizujeme kvadratickou odchylku $G := \delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$
- Odvození: $\frac{\partial G}{\partial a_k} = 0$
- Normální rovnice $\begin{aligned} a_0(\sum_i 1) + a_1(\sum_i x_i) + a_2(\sum_i x_i^2) &= \sum_i y_i, \\ a_0(\sum_i x_i) + a_1(\sum_i x_i^2) + a_2(\sum_i x_i^3) &= \sum_i x_i y_i, \\ a_0(\sum_i x_i^2) + a_1(\sum_i x_i^3) + a_2(\sum_i x_i^4) &= \sum_i x_i^2 y_i, \end{aligned}$

1. Pro dané vektory a matice určete jejich normy.

$$(2,-3,0)^T, \qquad (\frac{1}{4},2,0,\frac{5}{3})^T, \qquad (2+p,-2,1)^T,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & p+1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ p & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, zda dané matice jsou DD/ODD/SPD. Nakreslete graf daných matic a rozhodněte, zda jsou rozložitelné nebo nerozložitelné.

2. Dána soustava lineárních rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} p & 2 & -2 \\ 0 & 4 & p-4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Definujte pojem ODD ve sloupcích. Určete všechna $p \in \mathbb{R}$, pro které je daná matice ODD (v řádcích nebo sloupcích)?
- Volte $p = 2$ a vyřešte soustavu LU rozkladem.
- Volte $p = 2$. Bude konvergovat Jacobiho iterační metoda? Volte $X^0 = b$ a spočtěte X^1 touto metodou.
- Volte $p = 2$. Bude konvergovat Gauss-Seidelova iterační metoda? Volte $X^0 = b$ a spočtěte X^1 touto metodou.

3 a) Určete všechna $p \in R$, pro která konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $X = UX + V$, kde

$$U = \begin{pmatrix} -0.8 & p^2 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

b) Pro $p = 0.2$, $X^{(0)} = V$ určete $X^{(1)}$ touto metodou.

4. Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{s}$, kde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & t+1 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & t+0.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ -1.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Určete všechna $t \in \mathcal{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu.

b) Pro $t = -0.5$ určete $\vec{x}^{(1)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

c) Vypočtěte $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_m$. Odhadněte chybu.

5. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1,-2,1)^T$. Spočtěte Jacobiho iterační metodou $X^{(1)}$.

6.a Dána soustava lineárních rovnic $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ p & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna některá z postačujících podmínek konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna nutná a postačující podmínka konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pro $X^{(0)} = B$.

7. a) Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A SPD? Zdůvodněte!

b) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Volte $\omega = 1.5$ a spočtěte SOR iterační metodou $X^{(1)}$.

c) Je pro tento případ SOR konvergentní? Zdůvodněte.

8. a) Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Ukažte, že pro danou matici je řešení soustavy rovnic ekvivalentní minimalizaci funkce $F(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$

b) Odvoďte podmínku pro volbu směru $\mathbf{p}$ tak aby pro iterační proces

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}$$

došlo k poklesu funkce $F(x)$ pro nějaká $\alpha > 0$. Zvolte směr, v kterém je pokles funkcionálu nejmenší.

c) Pro daný směr odvoďte volbu optimálního kroku α, tj. tak aby pokles v daném směru byl největší možný.

d) Volte $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$ a spočtěte metodou největšího spádu $X^{(1)}$.

9.a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$2xy - 3 = 0, \qquad x^2 - y^2 = 0.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy (a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (1; 0)^T$.

c) Určete $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m$.

10. Je dána rovnice $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, kde vektorová funkce $\boldsymbol{F}$ má složky

$$F_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_1 + x_2} + x_1)$$

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\frac{3}{x_1 + x_2} + x_2)$$

a) Určete Jacobiho matici funkce F a ověřte, zda v bodě $[1,1]$ je její norma menší než jedna.

b) Volte $X^{(0)} = (1;1)^T$ a stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z řešení rovnice pomocí prosté iterační metody.

11.a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$\frac{1}{x} - 10y = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 4.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy (a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (0;1)^T$.

c) Určete $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_l$.

12.a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$x^2 + y = 1, \qquad e^{-x} = \frac{1}{2}y.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy (a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (0;1)^T$.

c) Určete $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m$.

13.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Je dána tabulka hodnot

x_i	-1	-1	0	1	1	2
y_i	0.5	-0.4	0.7	0.5	0.5	-0.4

Určete polynom p_1^* nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot.

14.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 2. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Je dána tabulka hodnot

x_i	-2	-1	-1	0	0	1	1	2
y_i	9.9	4	4.1	0.1	0.2	-2	-2.5	-1.8

Určete polynom p_1^* nejvýše 2. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot. Určete odpovídající kvadratickou odchylku.

DÚ. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p-1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Pro jakou hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$ pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

c) Volte $p = 2$ a $X^{(0)} = (2, 1, 0)^T$. Spočtěte pomocí Jacobiho iterační metody $X^{(1)}$.

DÚ. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} p & 2 & 3 \\ -1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix},$$

Za p dosaďte nejmenší kladné celé číslo, pro které Jacobiho iterační metoda konverguje (zdůvodněte) a určete $X^{(1)}$ touto metodou pro $X^{(0)} = 0$.

DÚ. Zdůvodněte, že pro soustavu lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

konverguje Jacobiova i Gauss-Seidelova iterační metoda.

b) Určete $X^{(1)}, X^{(2)}$ Gauss-Seidelovou iterační metodou při volbě $X^{(0)} = 0$.

c) Vypočtěte $\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_m$.

DÚ. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 0 & p & 0 \\ p & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které lze soustavu řešit Gauss-Seidelovou iterační metodou.

b) Pro p=1 určete $X^{(1)}, X^{(2)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = 0$.

DÚ. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek (pro matici A, ne U_G) Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.

DÚ. Dána soustava

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek (pro matici A, ne U_G) Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.