LU rozklad: $\mathbb{A}x = b$

- Provedeme rozklad $\mathbb{A}$ na dolní (L) a horní(U) trojúhelníkovou matici. Volíme diagonálu $\mathbb{L}$, $l_{ii} = 1$.
$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$$
- Řešíme soustavu
$$\mathbb{L}y = b$$
- Řešíme soustavu
$$\mathbb{U}x = y$$

Norma matice a vektoru

- Řádková norma
$$\|\mathbb{A}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|$$
- Sloupcová norma
$$\|\mathbb{A}\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_\ell = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
- Euklidovská norma
$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vlastnosti matice $\mathbb{A}$:

- **ostře diagonálně dominantní** (ODD) v řádcích, pokud
$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad \forall i$$
- **symetrická**, pokud $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$
$$a_{ij} = a_{ji}$$
- **pozitivně definitní** pokud
$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \det \mathbb{A} > 0$$
- **spektrální poloměr** matice $\mathbb{A}$ je číslo $\rho(\mathbb{A})$ definované
$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ je vlastní číslo } \mathbb{A}\}$$
- spektrální poloměr a norma matice
$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|$$

Prostá iterační metoda

$$\text{Soustava zapsaná ve tvaru:} \qquad x = \mathbb{U}x + V,$$

$$\text{Iterační metoda:} \qquad X^{(k+1)} = \mathbb{U}X^{(k)} + V,$$

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|\mathbb{U}\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní.
- Je-li $\|\mathbb{U}\| < 1$, pak

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|}{1 - \|\mathbb{U}\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|^k}{1 - \|\mathbb{U}\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Jacobiho iterační metoda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Maticový zápis ($\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$)

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{P})}_{\mathbb{U}_J} x^{(k)} + \underbrace{\mathbb{D}^{-1}b}_{V_J}.$$

- **Nutná a postačující podmínka**: Jacobiho iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_J) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li matice A ODD (v řádcích nebo sloupcích), pak Jacobiho iterační metoda je konvergentní.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_J$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Gauss-Seidelova iterační metoda

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbb{D}+\mathbb{L})^{-1}\mathbb{P}}_{\mathbb{U}_{GS}} x^{(k)} + \underbrace{(\mathbb{D}+\mathbb{L})^{-1}\mathbf{b}}_{V_{GS}}.$$

- **Postačující podmínka**: Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, pak Gauss-Seidelova iterační metoda je konvergentní.
- **Postačující podmínka**: Je-li matice $\mathbb{A}$ symetrická a zároveň pozitivně definitní, pak Gauss-Seidelova iterační metoda je konvergentní.
- **Nutná a postačující podmínka**: Gauss-Seidelova iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_{GS}) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_{GS}$ jsou kořeny rovnice $\det(\lambda\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$.

Gradientní metoda

- **Předpoklady:** Matice A symetrická a pozitivně definitní. $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$.
- **Ekvivalence:**

$$\left(\quad \mathbb{A}x^* = \mathbf{b} \quad \right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(F(\mathbf{x}^*) \le F(\mathbf{x}) \qquad \text{pro libovolné } \mathbf{x} \right).$$

- **Gradientní metoda:**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}$$

- **Volba směru (největší spád):**

$$\mathbf{p} = -\operatorname{grad} F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}.$$

- **Volba optimálního kroku ve směru p**

$$\alpha = \operatorname*{argmin}_{\alpha} F\big(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}\big) = \frac{\mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x})}{\mathbf{p}^T\mathbb{A}\mathbf{p}}$$

Newtonova metoda

$$f(x,y)=0, \qquad g(x,y)=0.$$

- Taylorův rozvoj resp. tečná rovina v bodě $A=[x^{(k)},y^{(k)}]$.

$$0=f(x^*,y^*)=f(A)+f_x(A)(x^*-x^{(k)})+f_y(A)(y^*-y^{(k)})+\dots$$

$$0=g(x^*,y^*)=g(A)+g_x(A)(x^*-x^{(k)})+g_y(A)(y^*-y^{(k)})+\dots$$

- Pro přírůstek $\Delta_x=(x^{(k+1)}-x^{(k)})$, $\Delta_y=(y^{(k+1)}-y^{(k)})$ dostáváme

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x+f_y(A)\Delta_y &= -f(A)\\ g_x(A)\Delta_x+g_y(A)\Delta_y &= -g(A)\end{aligned}$$

- $$\begin{pmatrix} x^{(k+1)}\\ y^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{(k)}\\ y^{(k)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta_x\\ \Delta_y\end{pmatrix}$$

Interpolace polynomem Tabulku (x_i,y_i) pro $i=0,\dots,n$ lze interpolovat polynomem

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

polynomem nejvýše stupně n, pokud $x_i\neq x_j$ pro $i\neq j$.

Interpolační polynom splňuje rovnice

$$p(x_i)=y_i \qquad \text{pro } i=0\ldots n.$$

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

- Polynom stupně 1 nebo 2:

$$p(x)=a_0+a_1x, \qquad \text{nebo} \qquad p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

- tabulka dat $[x_i,y_i]$ - podmínky pro aproximaci.
- princip: minimalizujeme kvadratickou odchylku

$$G(a_0,a_1,a_2):=\delta^2(p(x))=\sum_i\left(p(x_i)-y_i\right)^2$$

- odvození normálních rovnic

$$\frac{\partial G}{\partial a_k}=0 \qquad k=0,1,2.$$

- soustava

$$a_0(\sum_i 1)+a_1(\sum_i x_i)+a_2(\sum_i x_i^2)=\sum_i y_i,$$

$$a_0(\sum_i x_i)+a_1(\sum_i x_i^2)+a_2(\sum_i x_i^3)=\sum_i x_iy_i,$$

$$a_0(\sum_i x_i^2)+a_1(\sum_i x_i^3)+a_2(\sum_i x_i^4)=\sum_i x_i^2y_i,$$