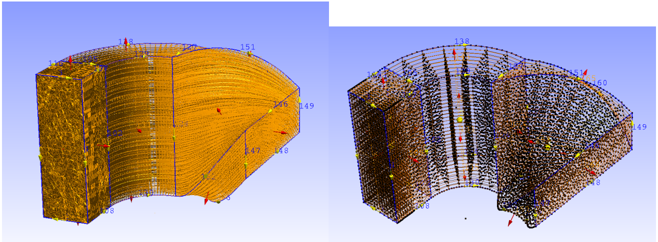
Numerická matematika

Úvodní informace

Viz **http://mat.fs.cvut.cz**

- **Kontakt:** Petr Sváček, KN:D 201

Soustavy rovnic, souvislost s praxí



- Těleso nahradíme diskrétními body, hledáme neznámé fyzikální veličiny v těchto bodech.
- Užijeme fyzikální vztahy, získáme soustavu nelineárních/lineárních rovnic.
- Hledáme řešení této soustavy: n - počet neznámých.

Soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Známe: transponovaná/symetrická, hodnost, regulární/singulární, Frobeniova věta.
- Známe: Gaussova eliminace, LU rozklad, determinant, inverzní matice.
- Známe: Vlastní číslo a vektor.

$$Au = \lambda u, \qquad u \neq 0,$$

- **Nové: Velké řídké matice, efektivita řešení.**

Přímé metody řešení

$$\mathbb{A}x = b$$

Přímé metody jsou takové metody, které vedou k nalezení přesného řešení v předem známém počtu kroků.

Výhody: Vždy vedou k výsledku.

Nevýhody: Rychle rostoucí výpočetní a paměťová náročnost operací $\approx n^3$, paměť $\approx n^2$.

- **Gaussova eliminace.**
- **Inverzní matice.**
- **Cramerovo pravidlo.**
- **LU rozklad.**

LU rozklad

Postup řešení

- Uvažujme soustavu s maticí $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ typu $n \times n$

$$\mathbb{L}\mathbb{U}x = b$$

- Řešíme soustavu $\approx n^2$.

$$\mathbb{L}y = b$$

- Řešíme soustavu $\approx n^2$.

$$\mathbb{U}x = y$$

- Jak získat LU rozklad? (2 možnosti, viz cvičení)

Shrnutí: Přímé metody řešení

Přímé metody řešení $\mathbb{A}x = b$

- Zaručeno, že dosáhnou výsledku.
- Rostoucí výpočetní resp. paměťová náročnost s n^3 resp. n^2.

Efektivnější řešení?

- Stačí přibližné řešení, hledáme vhodný předpis

$$X^{(k+1)} = F(X^{(k)}, \dots)$$

- viz posloupnost

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} + x_n\right)$$

Příklad

Soustavu

$$\mathbb{A}x = b$$

je možné přepsat jako

$$x = \mathbb{U}x + V,$$

Zvolíme $X^{(0)}$, spočítáme $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$

Pokud konverguje nezávisle na $X^{(0)}$, říkáme, že odpovídající **metoda je konvergentní**.

Jak měřit vzdálenost $X^{(k)}$ od X^*? Norma.

Je-li $V = 0$, pak $X^{(n)}$ závisí na velikosti $\mathbb{U}$ (normě)

$$X^{(n)} = \mathbb{U}^n X^{(0)}$$

Prostá iterační metoda

Je-li soustava tvaru

$$x = Ux + V,$$

Iterační metoda

$$X^{(k+1)} = UX^{(k)} + V,$$

Pokud konverguje, konverguje k řešení.

Konvergence závisí na **vlastnostech** matice $\mathbb{U}$, případně na vlastnostech matice $\mathbb{A}$, z které vznikla.

Velikost vektoru. Norma

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.04 \\ 0.03 \\ -0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

Norma $\|x\| = ?$, $\|e\| = ?$

Norma vektoru $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha u\| \leq |\alpha| \|u\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Norma matice lze definovat pomocí normy vektoru

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{x, \|x\|=1} \|\mathbb{A}x\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathbb{A}x\|}{\|x\|}$$

Norma matice a vektoru

- Řádková norma

$$\|\mathbf{A}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|$$

- Sloupcová norma

$$\|\mathbf{A}\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_\ell = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Frobeniova/Euklidovská norma

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Spektrum a spektrální poloměr. Pozn. spektrální norma matice $\|\mathbb{A}\|_2$.
- Vztah normy matice a vektoru

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

- Vztah normy a spektrálního poloměru.

Vlastnosti matice

Matice A je

- **diagonálně dominantní** (DD), pokud $\forall i$

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- **ostře diagonálně dominantní** (ODD), pokud $\forall i$

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- **pozitivně semidefinitní** pokud pro libovolný vektor platí

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \geq 0$$

- **pozitivně definitní** - ostrá nerovnost pro nenulový vektor
- **symetrická pozitivně definitní** (SPD)
- Symetrické pozitivně definitní matice $\Leftrightarrow$ kladná vlastní čísla nebo kladné hlavní minory.

Vlastnosti matice

Matice A je

- **reducibilní/rozložitelná**, pokud $\exists$ P permutační matice tak, že
$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
- **ireducibilní/nerozložitelná**, pokud není rozložitelná/reducibilní.
- **Graf matice**: uzly $1, \ldots, n$, orientované hrany od i k j pro $a_{ij} \neq 0$
- **Graf - silně souvislý**, od libovolného i se dostanu k libovolnému j. **Nerozložitelná matice má silně souvislý graf.**
- je **ireducibilně/nerozložitelně diagonálně dominantní (IDD)**, pokud
  (i) je diagonálně dominantní,
  (ii) $\exists i$
  $$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
  (iii) je ireducibilní,
- Souvislost s regularitou matice.

Prostá iterační metoda

Je-li soustava tvaru

$$x = Ux + V,$$

Iterační metoda

$$X^{(k+1)} = UX^{(k)} + V,$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: $\|\|$ - maticova norma. Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní.
- **Odhad chyby**:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|^k}{1 - \|U\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Prostá iterační metoda: Příklad.

Př. 1. Určete všechna $p \in R$, pro která konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $X = UX + V$, kde $V = (-1, 2, 0.5)^T$,

$$U = \begin{pmatrix} -0.8 & p^2 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix},$$

Pro $p = 0.2$, $X^{(0)} = V$ určete $X^{(1)}$ touto metodou.

Př. 2. Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{s}$, kde $\vec{s} = (1.7, -1.8, 0.5)^T$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & t+1 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & t+0.5 \end{pmatrix}$$

Určete všechna $t \in \mathcal{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu. Pro $t = -0.5$ určete $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Vypočtěte $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|_m$. Odhadněte chybu.

Přednáška č. 2

- Jacobiho iterační metoda, postup výpočtu, kritéria konvergence.
- Gauss-Seidelova iterační metoda, postup výpočtu, kritéria konvergence.
- Super-relaxační metoda (SOR).

Opakování

- Norma matice - řádková, sloupcová, Euklidovská.
- PD, SPD, DD, nerozložitelně/ireducibilně diagonálně dominantní (IDD), ODD (řádky nebo sloupce), regularita matice
- Prostá iterační metoda.
- **Souvislost pojmů**
- Doplníme číslo podmíněnnosti.

Číslo podmíněnosti a špatně podmíněnná matice

Doplnění pojmů

- Je-li det $\mathbb{A} \to 0$, nemusí být soustava ještě špatně řešitelná.
- Vadí tzv. špatně podmíněná matice (tj. velké $\kappa(A)$)
- **Číslo podmíněnosti** $\kappa(A)$ Vezmeme řešení x^* a $\tilde{x}$ pro blízkou pravou stranu $\tilde{b}$,

  $$Ax^* = b \qquad A\tilde{x} = \tilde{b}$$

  Ukážeme, že platí

  $$\frac{\|(x^* - \tilde{x})\|}{\|x^*\|} \leq \underbrace{\|\mathbb{A}^{-1}\|\|\mathbb{A}\|}_{\kappa(\mathbb{A})} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

  Pro SPD matice platí

  $$\kappa_2(\mathbb{A}) = \lambda_{MAX}/\lambda_{MIN}$$

  Př.
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.99999 \end{pmatrix}$, $b = (2, 1.99999)^T, \tilde{b} = (2, 1.999999)^T$.

Prostá iterační metoda

Soustava tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{x} + \mathbf{V},$$

Iterační metoda

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbb{U}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{V},$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní. Navíc platí

$$\|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|}{1 - \|\mathbb{U}\|} \|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)}\|,$$

$$\|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|^k}{1 - \|\mathbb{U}\|} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|,$$

Prostá iterační metoda: Příklad.

Př. 1. Určete všechna $p \in R$, pro která konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $X = UX + V$, kde $V = (-1, 2, 0.5)^T$,

$$U = \begin{pmatrix} -0.8 & p^2 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix},$$

Pro $p = 0.2$, $X^{(0)} = V$ určete $X^{(1)}$ touto metodou.

Př. 2. Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{s}$, kde $\vec{s} = (1.7, -1.8, 0.5)^T$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & t+1 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & t+0.5 \end{pmatrix}$$

Určete všechna $t \in \mathcal{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu. Pro $t = -0.5$ určete $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Vypočtěte $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|_m$. Odhadněte chybu.

Jak z matice $\mathbb{A}$ získám matici $\mathbb{U}$?

Odvození klasických iteračních metod

Vezmeme postupně rovnici $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ a z té nalezneme x_i:

$$\sum_{j<i} a_{ij} x_j + \mathbf{a}_{ii} x_i + \sum_{j>i} a_{ij} x_j = b_i$$

Vyjádříme x_i

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j - \sum_{j>i} a_{ij} x_j \right)$$

Pozn. lze též v maticovém zápise $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$, doplníme iterace $x_i^{(k+1)}$, $x_j^{(k/k+1)}$ (Jacobi, Gauss-Seidel).

Jacobiho iterační metoda

Pro $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$\mathbb{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbb{L} + \mathbb{P})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a Jacobiho iterační metoda

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{P})}_{\mathbb{U}_J}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbb{V}_J}.$$

Platí

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD(IDD), pak Jacobiho iterační metoda je konvergentní.
- Jacobiho iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_J) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_J$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Jacobiho iterační metoda: Příklad.

Př. 3. Je dána soustava $Ax = b$, kde

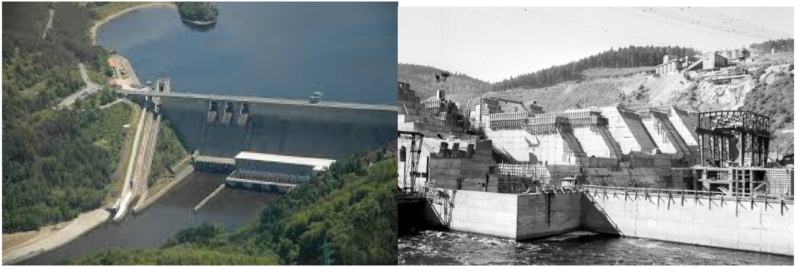
$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD (IDD, SPD)? Zdůvodněte!

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte Jacobiho iterační metodou $X^{(1)}$.

Kde se používali/jí iterační metody?



Výstavba přehrady Orlík, 1954-1961.
Betonová hráz 450 m dlouhá, výška 91 m.

Složkový zápis klasických iteračních metod

- **Jacobiho iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- **Gauss-Seidelova iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Gauss-Seidelova iterační metoda

Pro $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zapíšeme $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$(\mathbb{D} + \mathbb{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbb{P}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a tedy iterační metodu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbb{P}}_{\mathbb{U}_{GS}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbf{b}}_{V_{GS}}.$$

Platí

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD (IDD), pak je GS iterační metoda konvergentní.
- Je-li matice $\mathbb{A}$ SPD, pak je GS iterační metoda konvergentní.
- GS iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_{GS}) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_{GS}$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Iterační metody: Příklad.

Př. 4. Dána soustava lineárních rovnic $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ p & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna některá z postačujících podmínek konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Př. 5. Dána soustava

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechna $p \in R$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek (pro matici A, ne U_G) GS iterační metody.
b) Určete všechna $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka GS iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Superrelaxační metoda (SOR)

- **SOR** (ω - relaxační parameter)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j\geq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

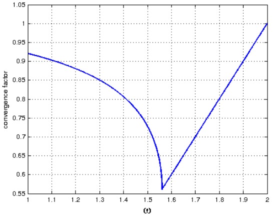
  nebo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)x_i^{(k)}$$

- $\mathbb{D}\mathbf{x}^{k+1} = \mathbb{D}\mathbf{x}^k + \omega(\mathbf{b} - \mathbb{L}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbb{D}\mathbf{x}^k - \mathbb{U}\mathbf{x}^k)$
- **Platí**
  - Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, $\omega \in (0,1\rangle$, pak je SOR konvergentní.
  - Je-li matice $\mathbb{A}$ SPD, $\omega \in (0,2)$, pak je SOR konvergentní.
  - Je-li SOR konvergentní, pak $\omega \in (0,2)$.
- $\rho(\mathbb{U}_{SOR})$ je spojitá funkce v ω.

Superrelaxační metoda (SOR)

$$
\begin{matrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{matrix}
$$



Optimální parameter (za určitých předpokladů, $\rho = \rho(U_{GS})$)

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$$

Pro daný obrázek:
20 iterací GS ($\omega = 1$) $0.92^{20} \approx 0.18$
20 iterací SOR ($\omega = 1.6$) $0.6^{20} \approx 3.6 \times 10^{-5}$

Příklad. SOR

Př. 6. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A SPD? Zdůvodněte!

b) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Volte $\omega = 1.5$ a spočtěte SOR iterační metodou $X^{(1)}$.

c) Je pro tento případ SOR konvergentní? Zdůvodněte.

Přednáška č. 3

- Gradientní metody, metoda největšího spádu, použití na soustavy s SPD maticí.
- Metoda sdružených gradientů.
- Uvažujeme kvadratickou funkci

$$g(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + 4x_2^2$$

Gradientní metoda

- **Předpoklady:** Matice A symetrická a pozitivně definitní. Hledáme minimum funkce:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$$

Gradientní metoda

- **Předpoklady:** Matice A symetrická a pozitivně definitní.
  Hledáme minimum funkce:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$$

- **Ekvivalence:**

$$(\quad \mathbb{A}x^* = \mathbf{b} \quad) \qquad \Leftrightarrow \qquad (F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}) \qquad \text{pro libovolné } \mathbf{x})\,.$$

- Iterační proces:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}$$

- Volba směru (**největší spád**):

$$\mathbf{p} = -\operatorname{grad} F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}.$$

- **Optimální** krok ve směru $\mathbf{p}$

$$\alpha = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} F\left(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}\right) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x})}{\mathbf{p} \cdot (\mathbb{A}\mathbf{p})}$$

Příklad. Největší spád

Př. 6. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Ukažte, že pro danou matici je řešení soustavy rovnic ekvivalentní minimalizaci funkce $F(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$

b) Odvoďte podmínku pro volbu směru $\mathbf{p}$ tak aby pro iterační proces

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{p}$$

došlo k poklesu funkce $F(x)$ pro nějaká $\alpha > 0$. Zvolte směr, v kterém je pokles funkce největší.

c) Pro daný směr odvoďte volbu optimálního kroku α, tj. tak aby pokles v daném směru byl největší možný.

d) Volte $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$ a spočtěte metodou největšího spádu $X^{(1)}$.

Metoda sdružených (konjugovaných) gradientů

Jak volit lépe směr?

- **ortogonální** směry - nevede ke zlepšení,
- $\mathbb{A}$**-ortogonální**: $\mathbf{p}_i \cdot (\mathbb{A}\mathbf{p}_j) = \mathbf{p}_j \cdot (\mathbb{A}\mathbf{p}_i) = \delta_{ij}$.
- **Gram-Schmidtův OG proces(?)**,
- **Zkusím:** OG jen 2 poslední směry
- Volíme $\mathbf{x}_0$, spočteme $\mathbf{p}_0 = b - \mathbf{b}A\mathbf{x}_0$ Dále počítáme pro $k = 0, 1, \ldots$
  - Krok α_k optimální ve směru $\mathbf{p}_k$,
  - Novou iteraci $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$,
  - Reziduum $\mathbf{r}_{k+1} = b - \mathbb{A}\mathbf{x}_{k+1}$,
  - **Nový směr**: kolmou část $\mathbf{r}_{k+1}$ k $\mathbf{p}_k$.

Jak volit lépe směr?

Metoda sdružených (konjugovaných) gradientů

- **Předpoklady:** Matice A symetrická a pozitivně definitní.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \mathbf{p}_j$$

- Označme chybu $\mathbf{e}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}^*$.
- **Optimální** krok lze zapsat

$$\alpha_j = -\frac{\mathbf{p}_j \cdot (\mathbb{A}\mathbf{e}_0)}{\mathbf{p}_j \cdot (\mathbb{A}\mathbf{p}_j)}$$

- Tedy: Jsou-li směry $\mathbb{A}$-ortogonální, **pak platí:**

$$\mathbf{p}_i \cdot (\mathbb{A}\mathbf{e}^{k+1}) = 0 \qquad\qquad \text{pro } i \leq k$$

- Důsledek?

Shrnutí - soustavy lineárních rovnic

Příklady k zamyšlení

- **Jednoduché ukázat:**
  I. $\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|$, $\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_F$
  II. $\|\mathbb{U}\| < 1$ pak PIM konvergentní. Ukázat odhad chyby.
  III. Výpočet vlastních čísel UJ a UGS,
  IV. ODD v řádcích, pak Jacobi konvergentní (jednoduché),
  V. SPD pak $a_{ii} > 0$ a vlastní čísla jsou reálná kladná
  VI. ODD ve sloupcích, pak Jacobi konvergentní,

Shrnutí - soustavy lineárních rovnic

Příklady k zamyšlení

- **Jednoduché ukázat:**
  I. $\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|$, $\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_F$
  II. $\|\mathbb{U}\| < 1$ pak PIM konvergentní. Ukázat odhad chyby.
  III. Výpočet vlastních čísel UJ a UGS,
  IV. ODD v řádcích, pak Jacobi konvergentní (jednoduché),
  V. SPD pak $a_{ii} > 0$ a vlastní čísla jsou reálná kladná
  VI. ODD ve sloupcích, pak Jacobi konvergentní,
- **Obtížnější**:
  - $\|\rho(U)\| < 1$ pak PIM konvergentní (Jordanův tvar),
  - ODD ve sloupcích/řádcích, pak GS je konvergentní,
  - IDD pak Jacobi/GS je konvergentní, (viz Gerschgorin)
  - ODD/IDD, pak SOR konvergentní pro $\omega \in (0, 1\rangle$,
  - SPD pak GS je konvergentní,
  - SPD, pak SOR je konvergentní pro $\omega \in (0, 2)$,

Přednáška č. 4

- **Soustavy nelineárních rovnic**
- Problémy existence a jednoznačnosti řešení.
- Iterační metody: **metoda prosté iterace, Newtonova metoda.**

Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Systém n-rovnic o n-neznámých

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) &= 0 \end{aligned}$$

- speciální volba $\rightarrow$ soustava lineárních rovnic
- není zaručena existence ani jednoznačnost řešení

Prostá iterační metoda

Soustava rovnic ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} F_1(x_1,\ldots,x_n) & = & x_1 \\ & \vdots & \\ F_n(x_1,\ldots,x_n) & = & x_n \end{array} \qquad \text{nebo-li } \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Prostá iterační metoda

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}),$$

Kontraktivní zobrazení: $F : M \to M$, $c \in [0,1)$ tak, že

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|$$

Platí

- Je-li F kontraktivní, pak existuje $x^* = F(x^*)$ (pevný bod, Banachova věta).
- 1D: $|F'(\mathbf{x})| < 1$,
- $\mathbb{R}^n$: $\|F'(\mathbf{x})\| < 1$.

Příklad. Prostá iterace pro nelineární rovnice

Př. Je dána rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, kde vektorová funkce $\mathbf{F}$ má složky

$$F_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_1 + x_2} + x_1\right)$$

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x_1 + x_2} + x_2\right)$$

a) Určete Jacobiho matici funkce F a ověřte, zda v bodě $[1, 1]$ je její norma menší než jedna.

b) Volte $X^{(0)} = (1; 1)^T$ a stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z řešení rovnice pomocí prosté iterační metody.

V bodě x^k užijeme Taylorův polynom

$$0 = f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x^k})(\mathbf{x} - \mathbf{x^k}) + R_2(x)$$

Zanedbáním dostaneme vzorec pro $x \approx x^{k+1}$

$$x^{k+1} = x^k - \left(f'(x^k)\right)^{-1} f(x^k).$$

Obecný vzorec pro soustavu $F(x) = 0$. Co je $F'(x)$?

$$x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1} F(x^k).$$

Newtonova metoda - odvození

Odvození pro 2 nelineární rovnice o 2 neznámých

Označme $k-$té přiblížení jako $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$

$$0 = f(x^*, y^*) = f(A) + f_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + f_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

$$0 = g(x^*, y^*) = g(A) + g_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + g_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

Zanedbáme-li další členy Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + \quad f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0, \\ g_x(A)\Delta_x + \quad g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0, \end{aligned}$$

dostáváme soustavu lineárních rovnic pro

$$\Delta_x = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \qquad \Delta_y = y^{(k+1)}) - y^{(k)}.$$

Newtonova iterační metoda

1. Zvolíme počáteční přiblížení $[x^0, y^0]$.
2. Postupně pro $k = 0, 1, \ldots$

a) Sestavíme soustavu rovnic v bodě $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$,

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0 \\ g_x(A)\Delta_x + g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0 \end{aligned}$$

b) Najdeme řešení této soustavy Δ_x, Δ_y

c) Spočteme nové přiblížení

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

Není zaručena konvergence k řešení.
Metoda může selhat (viz b))
Konvergence závisí na počátečním přiblížení.

Př. 9. Je dána soustava rovnic

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \qquad y = 2\cos(\pi x)$$

a) Graficky znázorněte přibližný počet a polohu kořenů této soustavy nelineárních rovnic.

b) Volte $\vec{x}^{(0)} = (-0.5; -1)^T$ a vypočtěte $\vec{x}^{(1)}$ Newtonovou metodou

c) Určete $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\ell$

Př. 10. Je dána soustava rovnic

$$\frac{1}{2x} - y = 0 \qquad x^2 + 4y^2 = 4$$

a) Graficky znázorněte přibližný počet a polohu kořenů této soustavy nelineárních rovnic.

b) Volte $\vec{x}^{(0)} = (1; 0)^T$ a vypočtěte $\vec{x}^{(1)}$ Newtonovou metodou

c) Určete $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_m$

Taylorův polynom, náhrada derivace

- Taylorův polynom

$$f(x+h) = T_n(h) + R_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{n+1}(h)$$

- Je-li f dostatečně hladká, pak $|R_{n+1}(h)| \leq Ch^{n+1} = O(h^{n+1})$
- Využijeme k náhradě derivací.

$$f(x+h) - f(x) = \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = \dots$$

- Druhá derivace $f''(x)$, přesnější náhrada $f'(x)$ z hodnot v $x, x-h, x-2h$.

Přednáška č. 5

Numerické řešení ODR.

- Taylorův polynom a odvození diferenčních náhrad.
- ODR, Cauchyova úloha: Matematický popis fyzikálních jevů.
- Obecná jednokroková metoda. Explicitní a implicitní Eulerova metoda.

Obyčejná diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

- Cauchyova úloha pro ODR 1. řádu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Cauchyova úloha pro soustavu rovnic

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}^0.$$

- Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \ldots y^{(n-1)}(y_0) = y_0,$$

- Post. podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení: MA3.

Taylorův polynom, náhrada derivace

- Taylorův polynom

$$f(x+h) = T_n(h) + R_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{n+1}(h)$$

- Je-li f dostatečně hladká, pak $|R_{n+1}(h)| \leq Ch^{n+1} = O(h^{n+1})$
- Využijeme k náhradě derivací.

$$f(x+h) - f(x) = \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = \dots$$

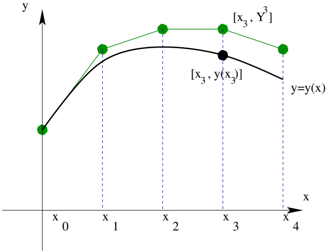
$$f(x+h) - f(x-h) = \dots$$

- Druhá derivace $f''(x)$, přesnější náhrada $f'(x)$ z hodnot v $x, x-h, x-2h$.

Diferenční náhrady

- dopředná diference
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+O(h),$$
- zpětná diference
$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)+O(h),$$
- 1. centrální diference
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)+O(h^2),$$
- 2. centrální diference
$$\frac{f(x_0+h)-2f(x)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)+O(h^2).$$
- 2. zpětná diference (2. řádu), A, B, C dopočítáme
$$\frac{Af(x_0)+Bf(x_0-h)+Cf(x_0-2h)}{2h}=f'(x_0)+O(h^2),$$

Princip numerického řešení



- **Přesné řešení:** $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.
- **Přibližné řešení** Y^i: krok $h = (b - a)/n$,

$$x_i = a + ih, \qquad Y^i \approx y(x_i)$$

- Užijeme diferenční náhrady: **Eulerova metoda** (explicitní resp. implicitní)

$$y'(x_n) \approx \frac{Y^{n+1} - Y^n}{h}, \qquad y'(x_{n+1}) \approx \frac{Y^{n+1} - Y^n}{h}$$

Explicitní a implicitní Eulerova metoda.

- Explicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_n, Y^n), \qquad Y^{n+1} = Y^n + hf(x_n, Y^n),$$

- Implicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_{n+1}, Y^{n+1}), \qquad Y^{n+1} - hf(x_{n+1}, Y^{n+1}) = Y^n$$

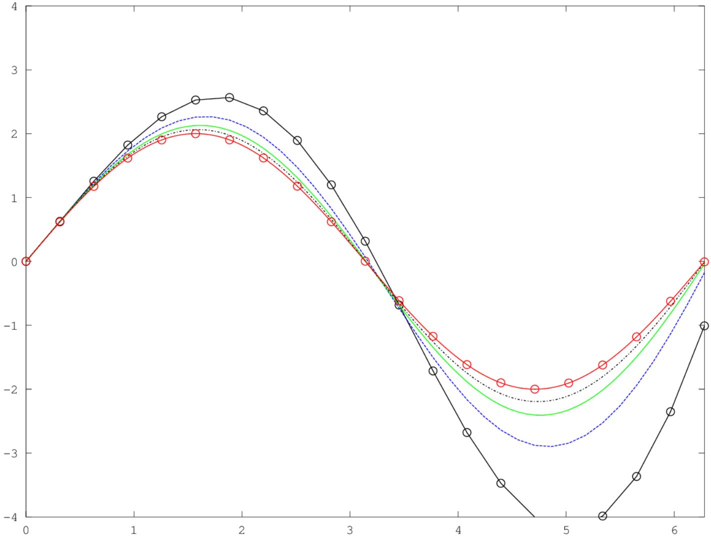
- **Stabilita:** Řešíme úlohu ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1,$$

  kde známe analytické řešení. Jak se chová numerické řešení?
- **Globální chyba** metody: $O(h)$.

Eulerova explicitní metoda - srovnání s přesným řešením

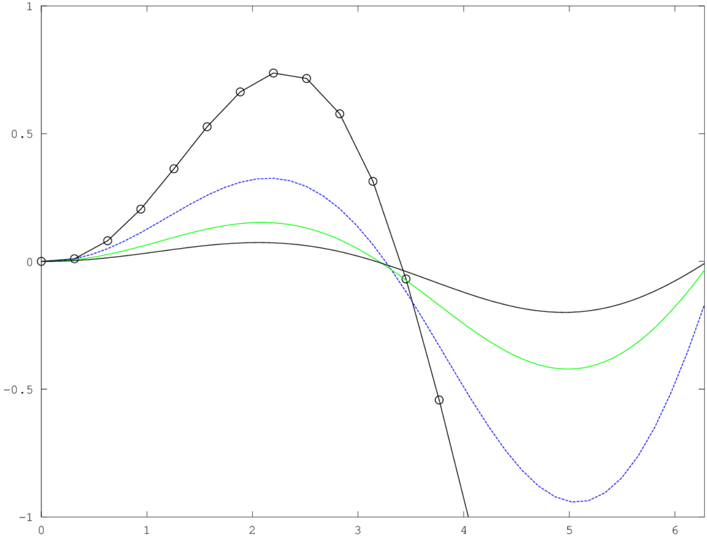
Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20$, $2\pi/40$, , $2\pi/80$, $2\pi/160$.

Eulerova explicitní metoda - chyba v závislosti na h

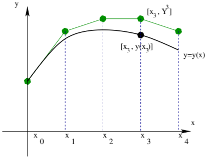
Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20$, $2\pi/40$, , $2\pi/80$, $2\pi/160$.

Zobecnění Eulerovy explicitní metody

Jednokrokové metody



- **<u>Přesné řešení:</u>** $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.
- **<u>Přibližné řešení Y^i:</u>** krok $h = (b-a)/n$,

$$x_i = a + ih, \qquad Y^i \approx y(x_i)$$

- **<u>Jednokrokové metody</u>**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Přírůstková funkce $\Phi = \Phi(x, y, h)$, přesný relativní přírůstek $\Delta(x, y, h)$.
- **Lokální diskretizační chyba:** $\delta = \Phi - \Delta$
- **Globální (akumulovaná) chyba:** $e(x_i) = Y^i - y(x_i)$
- Konvergence, řád metody, stabilita.

Př. Eulerova metoda

Příklad

22. Je dána Cauchyova úloha

$$y'(y-4) = x + \sqrt[3]{1-y}, \qquad y(3) = 2,$$

a) S krokem $h = 0.5$ určete přibližnou hodnotu $y(2)$ pomocí Eulerovy metody.

Př. Eulerova metoda

Příklad

22. Je dána úloha

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 26x = (1 - t)^+, x(0) = 0.001, x(0) = 0,$$

a) Volte krok a vypočítejte přibližné řešení v intervalu [0,4].

b) Zjistěte maximum numerického řešení a zkuste odhadnout jeho chybu (řešte na počítači).

Eulerova metoda

Příklad

20. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1 \operatorname{tg} x + y_3 - 2 \\ y_1 + y_2 \ln(x+1) \\ y_1 + 2y_2 - \frac{1}{x-2} y_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ověřte, že Cauchyova úloha má právě jedno řešení
b) Zapište interval $\mathcal{I}$ jejího maximálního řešení
c) S krokem $h = 0.2$ určete přibližnou hodnotu $\vec{y}(1.2)$ pomocí Eulerovy metody

Přednáška č. 6

- Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutty.
- Collatzova metoda (E1), RK4. Konvergence metod.
- Praktické užití metod.

Explicitní a implicitní Eulerova metoda.

- Explicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_n, Y^n), \qquad Y^{n+1} = Y^n + hf(x_n, Y^n),$$

- Implicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_{n+1}, Y^{n+1}), \qquad Y^{n+1} - hf(x_{n+1}, Y^{n+1}) = Y^n$$

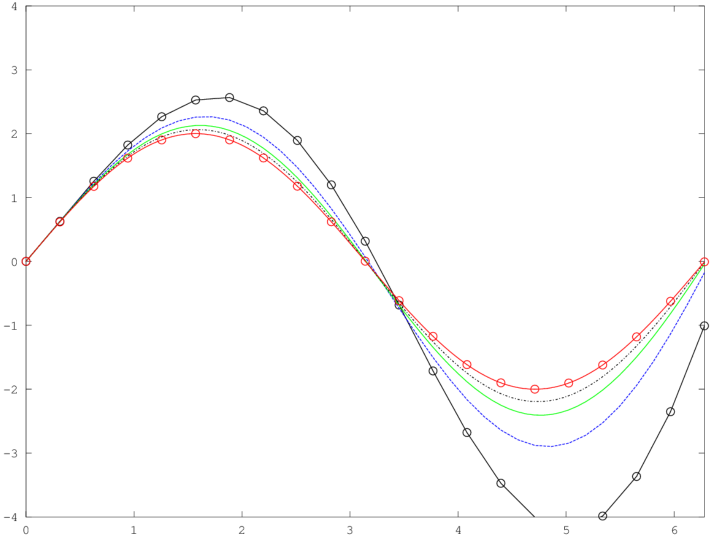
- **Stabilita:** Řešíme úlohu ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1,$$

  kde známe analytické řešení. Jak se chová numerické řešení?
- **Globální chyba** metody: $O(h)$.

Eulerova expl. metoda a přesné řešení

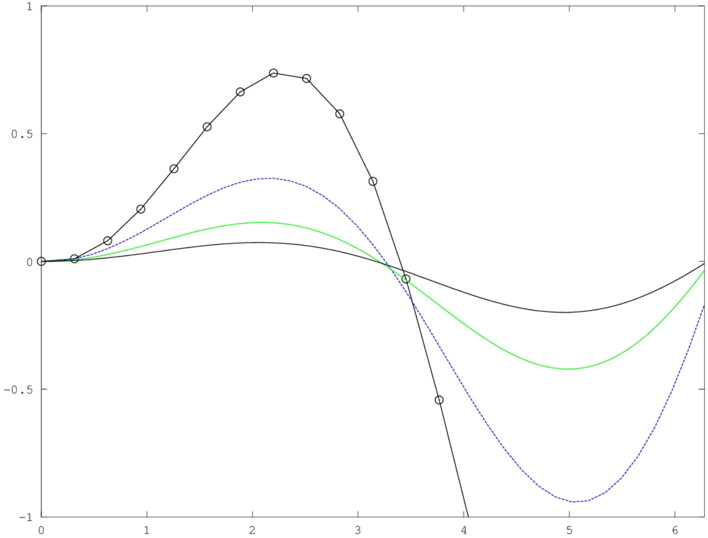
Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20,\ 2\pi/40,\ ,\ 2\pi/80,\ 2\pi/160.$

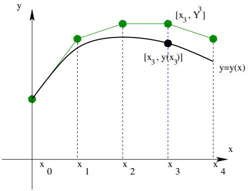
Eulerova expl. metoda, chyba

Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20$, $2\pi/40$, , $2\pi/80$, $2\pi/160$.

Zobecnění Eulerovy explicitní metody



- **<u>Přesné řešení:</u>** $y = y(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$.
- **<u>Přibližné řešení Y^i:</u>**

$$x_i = a + ih, \qquad Y^i \approx y(x_i)$$

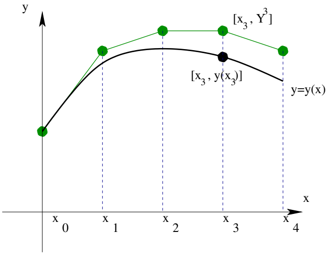
- **<u>Jednokroková metoda</u>**

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Přírůstková funkce Φ, přesný relativní přírůstek Δ.
- **Lokální diskretizační chyba** δ_n, konzistentní metoda.
- **Globální chyba (akumulovaná diskretizační chyba):** $e_i = Y^i - y(x_i)$
- Konvergence, řád metody, stabilita.

Zobecnění Eulerovy explicitní metody

Metody vyššího řádu



- Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- Metody Taylorova rozvoje

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

- Zderivováním dostaneme

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x, y(x))\right) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

Tedy

$$\tilde{\Phi}(x, y, h) = f(x, y) + hf_x(x, y) + hf_y(x, y)f(x, y)$$

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutta: n = 2.

- Metoda RK2

$$Y^{i+1} = Y^i + h(\omega_1 \mathbf{k}_1 + \omega_2 \mathbf{k}_2)$$

-

$$\mathbf{k}_1 = f(x_i, Y^i)$$

$$\mathbf{k}_2 = f(x_i + \alpha_2 h, Y^i + h\beta_{21}\mathbf{k}_1)$$

- Srovnáme Φ s $\tilde{\Phi}$, 4 koeficienty: $\omega_1, \omega_2, \alpha_2, \beta_{21}$.
- Jejich volbou dosáhneme 2. řád přesnosti (srovnáním s metodou Taylorova rozvoje)

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutty.

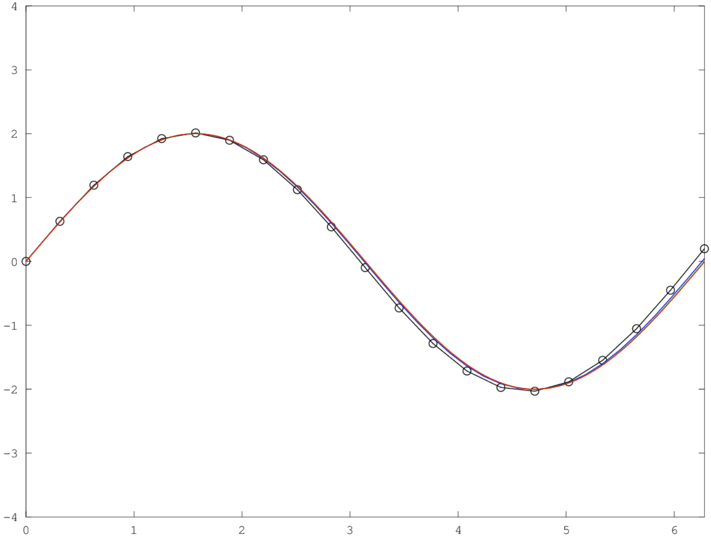
Collatzova metoda:

$$
\begin{aligned}
Y^{i+1} &= Y^i + h\mathbf{k}_2 \\
\mathbf{k}_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_1), \\
\mathbf{k}_1 &= f(x_i, Y^i),
\end{aligned}
$$

- grafické znázornění,
- řád metody: $O(h^2)$.

Collatzova metoda - srovnání s přesným řešením

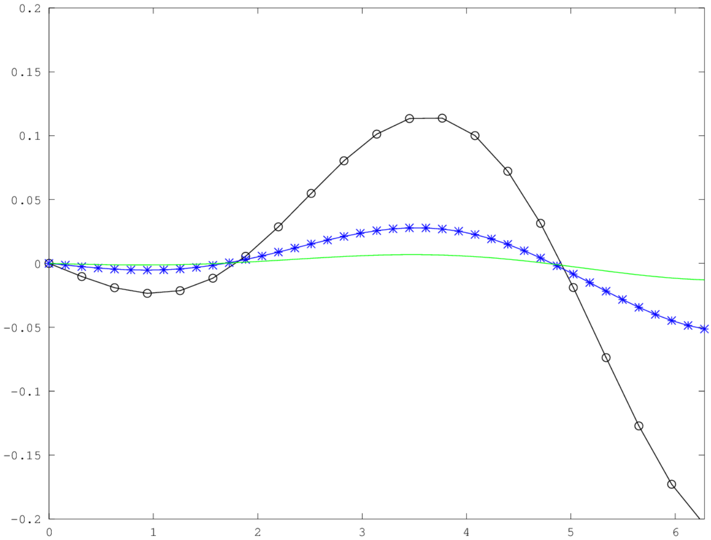
Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20,\ 2\pi/40,\ ,\ 2\pi/80$.

Collatzova metoda - chyby v závislosti na kroku h

Rovnice $\ddot{x} + x = 0$



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20,\ 2\pi/40,\ ,\ 2\pi/80.$

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutta

- **Jednokroková metoda n-tého stupně**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Metody RK: Speciální volba přírůstkové funkce $\Phi(x_i, Y^i, h)$

$$\Phi(x_i, Y^i, h) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{k}_i$$

- kde

$$\mathbf{k}_i = f(x_i + \alpha_i h, Y^i + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}\mathbf{k}_i)$$

- Volba koeficientů: co nejvyššího řád konvergence, závisí na n.

Metoda Runge-Kutty 4. řádu.

Runge-Kutta 4. řádu:

$$Y^{i+1} = Y^i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

$$\mathbf{k}_1 = f(x_i, Y^i),$$

$$\mathbf{k}_2 = f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_1),$$

$$\mathbf{k}_3 = f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_2),$$

$$\mathbf{k}_4 = f(x_i + h, Y^i + h\mathbf{k}_3),$$

Řád metody: $O(h^4)$.

Řád konvergence metod typu Runge-Kutty.

- $$Y^{i+1} = Y^i + h\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{k}_i\right),$$
- kde
$$k_i = f(x_i + \alpha_i h, Y^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \mathbf{k}_i)$$
- Řád konvergence:

n	p
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	5

- **Pozn.** Volba kroku: h lze volit i záporné, lze použít i volba $h > 1$ - souvislost s $O(h^p)$!

Příklady - Cauchyova úloha.

21. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny postačujícípodmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem $h = 1$ určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2$.

c) Nechť y_i označuje hodnotu numerického řešení v bodě x_i získaného Collatzovou metodou a y_i^* hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu ε_i. Zapište jaká je závislost ε_i na kroku h a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě x při změně kroku z h na $h/4$ u Collatzovy metody.

22. Je dána Cauchyova úloha

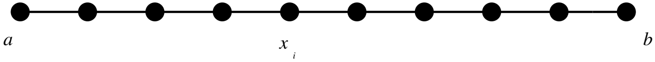
$$y''' - yy'' + \frac{y'}{y} \ln x = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad y(3) = -1,\ y'(3) = 0, y''(3) = 0.$$

Určete s krokem $h = 0,4$ pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení $y''(3.4)$.

Přednáška č. 7

- Metoda sítí (konečných diferencí) v 1 a 2D.
- Okrajová úloha pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu. Existence a jednoznačnost řešení.
- Samoadjungovaný tvar rovnice. Sturmovy okrajové podmínky.

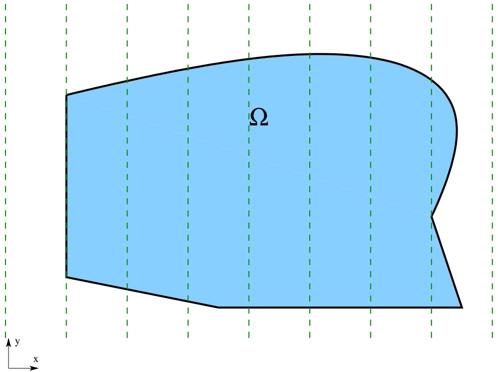
Metoda sítí 1D



- Řešení hledáme na $I = \langle a, b \rangle$
- Volíme $h = (b - a)/n$, síť $x_i = a + ih$
- Řešení aproximujeme $y(x_i) \approx Y_i$
- Derivace nahradíme diferencemi, řešíme soustavu

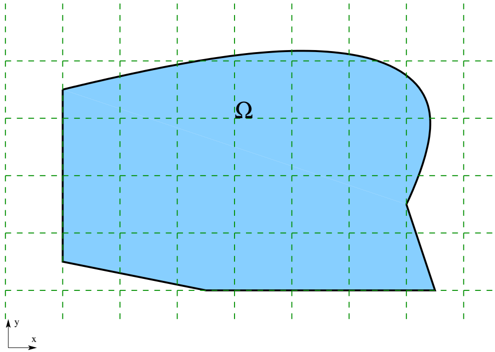
$$A_h(\vec{Y}) = F_h$$

Metoda sítí 2D



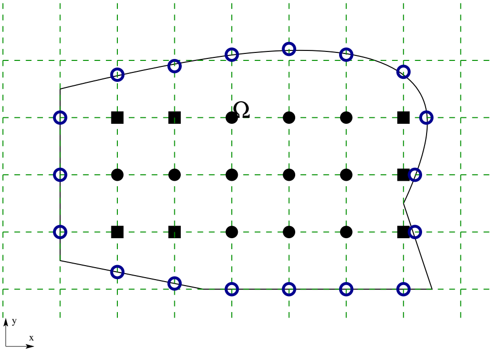
- Aproximujeme $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$: volíme $h > 0$,
- označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$

Metoda sítí 2D



- Aproximujeme $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$: volíme $h > 0$,
- označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$
- označíme $y_j = y_0 + jh$, síťové čáry $y = y_j$

Metoda sítí 2D



- Aproximujeme $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$: volíme $h > 0$,
- označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$
- označíme $y_j = y_0 + jh$, síťové čáry $y = y_j$
- označíme $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ průsečíky síťových čar v $\overline{\Omega}$
- $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$, derivace $\rightarrow$ diference, dostaneme

$$\vec{G}_h(\vec{U}_h) = \vec{F}_h$$

Okrajová úloha pro diferenciální rovnici 2. řádu

Motivace: proč řešíme?

- **Cauchyova úloha:**

$$my'' = F(x, y, y'), \qquad y(a) = A, y'(a) = K$$

- *Fyzikálně:* např. hmotný bod $[a, A]$, má danou rychlost, ?trajektorie?
- **Okrajová úloha:**

$$my'' = F(x, y, y'), \qquad y(a) = A, y(b) = B$$

- *Fyzikálně:* jak se z $[a, A]$ dostat do $[b, B]$?

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Formulace

- Lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

- Okrajové podmínky (Sturmovy okrajové podmínky), $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$,

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3.$$

- Speciální volby: Okrajové podmínky

$$\begin{array}{lll} \text{Neumannovy} & y'(a) = \alpha, & y'(b) = \beta, \\ \text{Dirichletovy} & y(a) = \alpha, & y(b) = \beta, \\ & y(a) = \alpha, & y'(b) = \beta. \end{array}$$

- Kdy existuje jednoznačné řešení $y(x)$?

pro okrajovou úlohu mnohem komplikovanější

Existence řešení pro okrajovou úlohu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

- Úloha A:
$$y''(x) = sin(x), \qquad y(0) = 2, y(\pi) = -2.$$
- Úloha B:
$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 1.$$
- Úloha C:
$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi/2) = 1.$$
- Úloha D:
$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$
- Úloha E:
$$-y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Ve všech případech: hladká data.
Existenci a jednoznačnost řešení lze zaručit jen pro úlohy ve speciálním tvaru.

Existence řešení pro okrajovou úlohu

Tvar rovnice v technických úlohách

V technických úlohách má diferenciální rovnice často tvar

$$-(py')' + qy = f,$$

- p, q - materiálové konstanty, kladné/nezáporné.
- pro neizotropní materiál - p, q jako nezáporné funkce

$$p = p(x), \qquad q = q(x).$$

Samoadjungovaný **tvar rovnice:**

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

Existence a jednoznačnost řešení pro úlohy v samoadjungovaném tvaru

Je dána okrajová úloha:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

a okrajové podmínky

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3.$$

Nechť platí

(i) $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - spojité funkce na $\langle a, b \rangle$

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle$

Pak existuje právě jedno řešení (s výjimkou případu $\alpha_2 = \beta_2 = 0 \equiv q(x)$).

Převod na samoadjungovaný tvar

Uvažujeme rovnici

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a,b),$$

přenásobíme $-p(x)$ (neznámá funkce)

$$-p(x)y'' - p(x)f_1(x)y' - p(x)f_2(x)y = -p(x)g(x),$$

samoadjungovaný tvar

$$\underbrace{-p(x)y'' - p'(x)y'}_{-(py')'} + q(x)y = f(x),$$

<u>Dostáváme:</u>

$$-p'(x) = -p(x)f_1(x), \qquad \text{diferenciální rovnice pro p(x)}$$

$$q(x) = -p(x)f_2(x), \qquad f(x) = -p(x)g(x).$$

Převod na samoadjungovaný tvar. Příklady.

23. Formulujte Dirichletovu úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.řádu v samoadjungovaném tvaru

a) Uveďte podmínky pro jednoznačnou řešitelnost úlohy (a)

b) Zdůvodněte, zda jsou postačující podmínky splněny pro úlohu

$$-(xy')' + \frac{3-x}{x}y = -\ln(2+x) \qquad y(1) = 0, y(2) = -4$$

24. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (c-x)y + x^2 = 0 \qquad y(2) = -1, y(4) = 3$$

a) Danou rovnici převeďte na samoadjungovaný tvar

b) Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathcal{R}$, pro něž jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy

25. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{4}{x^2-4}y = 1 \qquad y(3) = 0, y(5) = -1$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení

b) Odvoďte soustavu síťových rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.5$

26. Je dána rovnice

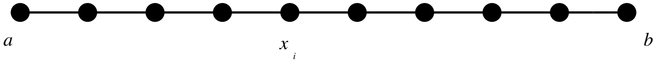
$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}$$

a) Určete intervaly maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici

b) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro danou rovnici s okrajovými podmínkami $y(-5) = -2, y(-3) = 0$

Princip numerického řešení

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad + \text{ okrajové podmínky}$$



- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b\rangle$.
- Interval I rozdělíme ekvidistantně s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme } q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- Budeme hledat **přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

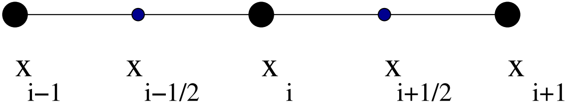
$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$-\left(py'\right)' \approx \text{dvojím užitím 1. centrální diference}$$

Diferenční náhrada v uzlu x_i

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B,$$



- **1. centrální diference** s krokem $h/2$

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^i - Y^{i-1}}{h}$$

- tedy dostaneme

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) Y^i + p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1}}{h^2}$$

Princip numerického řešení

- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b \rangle$.
- Interval I rozdělíme ekvidistantně s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme } q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- Budeme hledat **přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$-\left(py'\right)' \approx \frac{-p_{i-1/2} Y^{i-1} + (p_{i+1/2} + p_{i-1/2}) Y^i - p_{i+1/2} Y^{i+1}}{h^2}$$

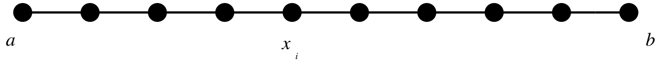
- Jaká je **lokální diskretizační chyba** a **globální chyba**?

Přednáška č. 8

- Numerické řešení okrajové úlohy pro ODR.
- Aproximace Dirichletových a Neumannových okrajových podmínek,
- Řešení vzniklé soustavy lineárních rovnic.

Princip numerického řešení

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad + \text{ okrajové podmínky}$$



- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b \rangle$.
- Interval I rozdělíme ekvidistantně s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme } q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- Budeme hledat **přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

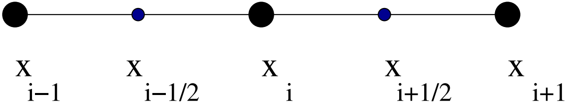
$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$(py')' \approx \text{dvojím užitím 1. centrální diference s krokem } h/2$$

Diferenční náhrada v uzlu x_i

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\; y(b) = B,$$



- **1. centrální diference** s krokem $h/2$

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^{i}}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i} - Y^{i-1}}{h}$$

- tedy dostaneme

$$\left(py'\right)'|_{x_i} \approx \frac{p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) Y^{i} + p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1}}{h^2}$$

Diferenční schéma pro Dirichletovu úlohu

Vlastnosti soustavy rovnic

Aproximovali jsme Dirichletovu úlohu

$$-\,(py')' + qy = f, \qquad\qquad y(a) = A,\ \ y(b) = B, \qquad\qquad (1)$$

soustavou rovnic pro $i = 1, \dots, n-1$

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

kde dosadíme za $Y^0 = A,\ Y^n = B$.

Vlastnosti soustavy rovnic:

- Matice soustavy je symetrická, třídiagonální.
- Matice soustavy je diagonálně dominantní ($p > 0, q \geq 0$).
- Je-li $q > 0$ pak matice soustavy je ODD. Vždy je IDD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní ($p > 0, q \geq 0$).

Náhrada Neumannovy okrajové podmínky

Vlastnosti soustavy rovnic

Aproxinujeme úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y'(b) = B, \tag{2}$$

- **diference 1. řádu** (řád chyby!)

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{h} = B$$

- **1. centrální diference** (ghost cell, přidáme $x_{n+1} = b + h$)

$$\frac{Y^{n+1} - Y^{n-1}}{2h} = B$$

$$-p_{n-\frac{1}{2}} Y^{n-1} + (p_{n+\frac{1}{2}} + p_{n-\frac{1}{2}} + h^2 q_n) Y^n - p_{n+\frac{1}{2}} Y^{n+1} = h^2 f_n$$

- 3. bodová diference z x_n, x_{n-1}, x_{n-2} (nevhodné: porušíme DD i symetrii),
- v uzlu $x = b$ postupujeme obdobně.

Diferenční náhrada dif. rovnice

Věta: Pro $p \in C^3(I)$, $y \in C^4(I)$ platí

$$(py')'\Big|_{x=x_i} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h} + O(h^2)$$

Diferenční náhrada dif. rovnice

Věta: Pro $p \in C^3(I)$, $y \in C^4(I)$ platí

$$(py')'\Big|_{x=x_i} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h} + O(h^2)$$

Dk.

$$(py')'\Big|_{x=x_i} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}}y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}}y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + O(h^2),$$

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h} + O(h^3) - \frac{h^2}{24}y'''(x_{i+1/2}), \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{y_i-y_{i-1}}{h} + O(h^3) - \frac{h^2}{24}y'''(x_{i-1/2}),$$

neboť platí

$$z(x_0+h/2) - z(x_0-h/2) = z'(x_0)h + \frac{2}{3!}\frac{h^3}{8}z'''(x_0) + O(h^4),$$

$$z(x_0+h/2) = z(x_0) + z'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{1}{2}z''(x_0)\frac{h^2}{4} + \frac{1}{3!}z'''(x_0)\frac{h^3}{8} + O(h^4)$$

$$z(x_0-h/2) = z(x_0) - z'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{1}{2}z''(x_0)\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3!}z'''(x_0)\frac{h^3}{8} + O(h^4)$$

Lokální diskretizační chyba, globální chyba

Dirichletova úloha

Víme: Přesné řešení Dirichletovy úlohy $y(x)$ splňuje

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{3}$$

pro $y \in C^4(I)$ a $\vec{y}$ hodnoty řešení $y(x)$ v uzlech sítě x_i platí,

$$\mathbb{A}_h \vec{y} = F_h + \vec{\eta}_h, \qquad \eta_{h,i} = O(h^2)$$

Přibližné řešení $\vec{Y}$ splňuje

$$\mathbb{A}\vec{Y} = F$$

Lokální diskretizační chyba je $O(h^2)$.
Lze něco říct o globální chybě chybě $e = \vec{y} - \vec{Y}$?

Stabilita pro spec. rovnici

- Úloha $-y'' = f(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.
- Vede na soustavu rovnic s maticí $\mathbb{A}$

$$\begin{array}{cccccccc}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{array}$$

- Ukážeme $\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, kde pro $k = 1, \dots, n-1$

$$\mathbf{u} = (u_j)_{j=1}^{n-1}, \qquad u_j = exp(\pm \mathbf{i}\pi kj/n), \qquad \lambda = 2-2\cos(\pi k/n)$$

- Symetrická poz. definitní matice:
$\|\mathbb{A}^{-1}\|_2 = 1/\lambda_{MIN} = 1/(2-2\cos(\pi/n)) \approx n^2/\pi^2 = 1/(\pi^2 h^2)$

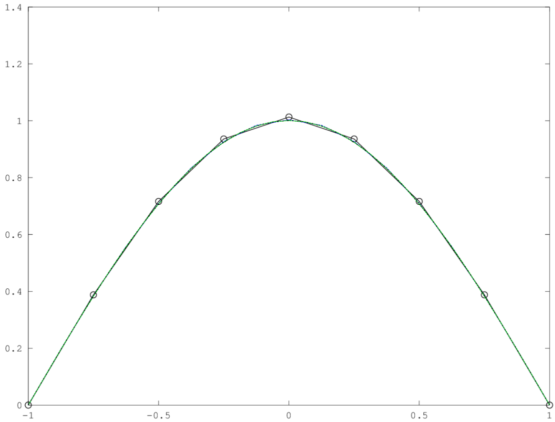
Numerické řešení vybraného problému

$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

Známe analytické řešení.

Numerická řešení, konvergence

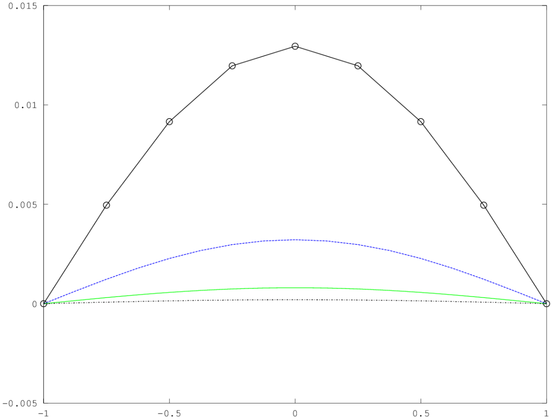
$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení, chyba

$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

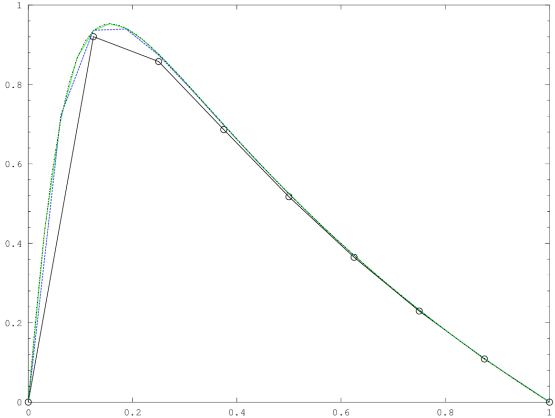


Chyba numerického řešení(log), krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení

Konvergence závisí na úloze

$$-(x^2y')' = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Příklady.

Metoda sítí pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru

27. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (c - x)y + x^2 = 0 \qquad y(2) = -1, y(4) = 3$$

a) Danou rovnici převeďte na samoadjungovaný tvar

b) Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathcal{R}$, pro něž jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy

c) Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.2$ pro $c = 1$

28. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{4}{x^2 - 4}y = 1 \qquad y(3) = 0, y(5) = -1$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení

b) Odvod'te soustavu sít'ových rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.5$

29. Je dána rovnice

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2 + x}y = \frac{1}{x - 3}$$

a) Určete intervaly maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici

b) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro danou rovnici s okrajovými podmínkami $y(-5) = -2, y(-3) = 0$

c) Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.4$

Přednáška č. 9

- Klasifikace lineárních parciálních diferenciálních rovnic 2.řádu dvou nezávisle proměnných.
- Numerické řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici.

Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic(PDR)

Příklady PDR

- Eliptická rovnice: Poissonova rovnice ($\triangle u = f$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

nebo

$$-\nabla \cdot \nabla u = f,$$

- Parabolická rovnice: Rovnice vedení tepla ($p > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Hyperbolická rovnice: Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

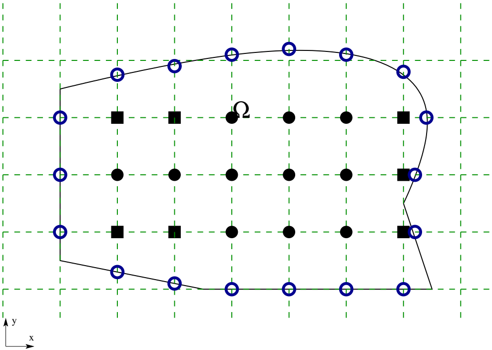
Existence řešení?

- Hledáme $u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})$ takové, že

$$\triangle u = f \text{ v } \Omega, \qquad u = \varphi \qquad \text{na } \partial\Omega$$

- Existence (klasického) řešení závisí na vlastnostech f, φ a Ω.
- **Věta:** Ω oblast s hladkou hranicí (C^2), $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
- **Věta:** Ω konvexní, Lipschitzovsky spojitá hranice, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $f \equiv 0$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

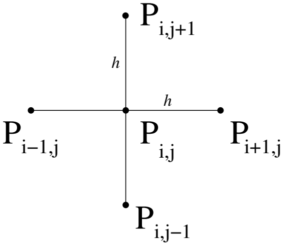
Metoda sítí 2D



- Aproximujeme $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$: volíme $h > 0$,
- označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$
- označíme $y_j = y_0 + jh$, síťové čáry $y = y_j$
- označíme $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ průsečíky síťových čar v $\overline{\Omega}$
- $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$, derivace $\to$ diference, dostaneme

$$\vec{G}_h(\vec{U}_h) = \vec{F}_h$$

Diferenční náhrady parciální derivace



- 2. centrální diference

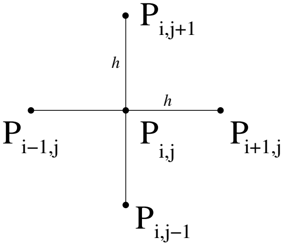
$$\frac{f(x_0+h)-2f(x)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)+O(h^2).$$

- Užijeme 2. centrální diferenci ve směru x resp. y, chyba $O(h^2)$
- nahradíme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)\approx\frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h^2},$$

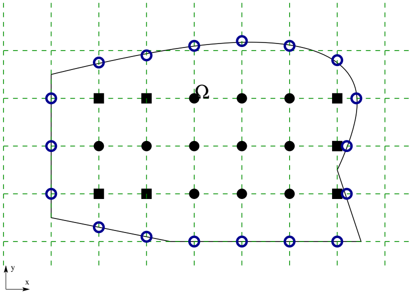
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j)\approx\frac{U_{i,j-1}-2U_{i,j}+U_{i,j+1}}{h^2},$$

Diferenční náhrady 2. parciální derivace



- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2},$$
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2},$$
- Náhrada rovnice $\triangle u = f$ v bodě $P_{i,j}$
  $$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = -h^2 f_{i,j}$$
- jen pro $P_{i,j}$, který „má všechny sousedy“, takový uzel nazýváme **regulární**.

Hraniční a neregulární uzly

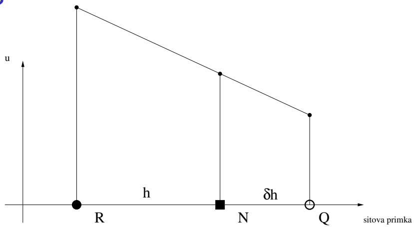


- Aproximujeme řešení $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$
- Označíme **hraniční**, **regulární** a **neregulární** uzly.
- v **hraničních uzlech** Q - užijeme Dirichletovy okrajové podmínky

$$U_Q = \varphi(Q)$$

- v **neregulárních uzlech** P_N - chceme zachovat řád aproximace!

Náhrada v neregulárním uzlu



- Hodnotu v neregulárním uzlu - lineární interpolace

$$\frac{U_R - U_N}{h} = \frac{U_N - U_Q}{\delta h}$$

- tedy

$$(1+\delta)U_N - \delta U_R = U_Q$$

- Pro hladké řešení je tato náhrada 2. řádu přesnosti, tj. chyba $O(h^2)$. Dle **Taylorova** rozvoje v P_N:

$$u(x+\delta h) = u(x) + \delta h u'(x) + O(h^2)$$

$$u(x-h) = u(x) - h u'(x) + O(h^2)$$

Vlastnosti soustavy rovnic. Řád aproximace

- Výsledná soustava rovnic je lineární soustava rovnic (n o n neznámých).
- Matice soustavy je symetrická (?, pozor, neregulární uzly)
- Matice soustavy je DD (ne však ODD), většinou IDD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní.
- Lokální chyba aproximace $O(h^2)$. Co platí pro globální chybu?

$$e_h = u - U_h$$

$$A_h U_h = F_h$$

$$A_h u = F_h + \eta_h, \qquad \eta_h = O(h^2)$$

- Je $e_h = O(h^2)$?

Poissonova rovnice

Příklad

33. Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = 4$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.8]$, $[1.4; 1.8]$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x^2$ na hranici $\Gamma = \partial\Omega$

b) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = 0.6$

c) Sestavte sít'ové rovnice v uzlech tak, aby metoda byla 2.řádu přesnosti

34. a) Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = x(y + 1)$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[1.8; 0]$, $[0; 1.5]$ a $[1.5; 1.5]$. s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x + y$ na hraniciΓ.

(a) Volte $h = 0.5$, nakreslete obrázek oblasti, zobrazte všechny síťové čáry, síťové uzly uvnitř oblasti, regulární neregulární a hraniční uzly, číslování uzlů.

(b) Sestavte sít'ové rovnice, v neregulárních uzlech užijte lineární interpolace.

Přednáška č. 10

Rovnice vedení tepla

- Metoda sítí pro rovnici vedení tepla.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Rovnice vedení tepla

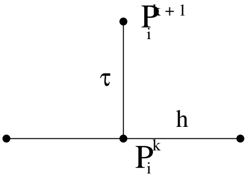
- **Úloha**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- **počáteční podmínka**
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \langle a, b\rangle,$$
- **okrajové podmínky**
$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

Metoda sítí a aproximace řešení

- **Rovnice**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Síť: Volíme krok $h = (b-a)/n$ a krok $\tau > 0$.
$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$
- Síťové uzly P_i^k a aproximace řešení U_i^k
$$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u(x_i, t_k).$$
- Postup řešení:
$$\{\mathbf{U}_i^0\} \to \{U_i^1\} \to \{U_i^2\} \to \{U_i^3\} \dots$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

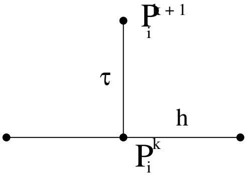
- Náhrada v uzlu P_i^k, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^k, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k,$$

- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- **Stabilita:**

$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.001	0	21	24	29	36	25
0.002	0	-159	44	49	-144	25
0.003	0	3461	-1936	...	...4	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

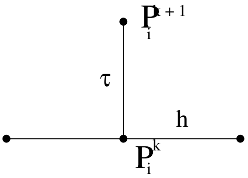
- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.00005$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 0.5$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.0005	0	2	5	10	17	25
0.0010	0	2.5	6	11	17.5	25
0.0015	0	3	6.75	12.25	18	25
0.0020	0	3.375	7.625	12.375	18.625	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Chyba aproximace:

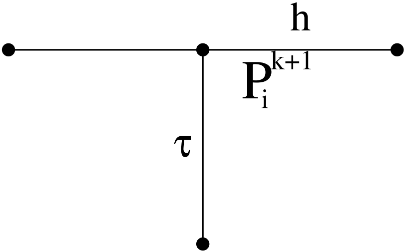
$$O(h^2 + \tau),$$

- Stabilita

$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rovnice vedení tepla

Implicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

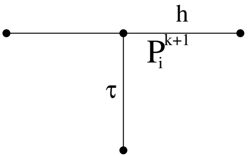
- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) \approx \frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

Rovnice vedení tepla

Implicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, chyba $O(h^2 + \tau)$

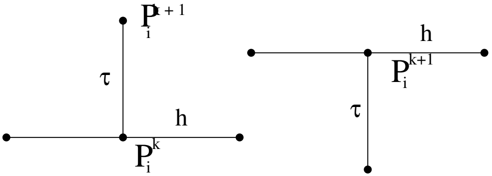
$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i^{k+1},$$

- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$, dostáváme

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

Rovnice vedení tepla

Srovnání explicitní a implicitní schéma



- **Explicitní schéma:**

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

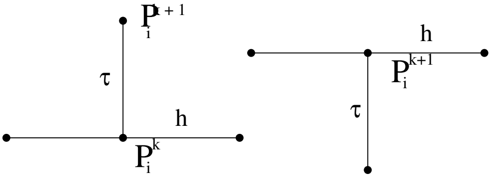
- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$
- **Implicitní schéma:**

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: Vždy.

Rovnice vedení tepla

Srovnání explicitní a implicitní schéma



- **Explicitní schéma:**

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$
- **Implicitní schéma:**

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: Vždy.
- Lze **Crank-Nicholson**: Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau^2)$, stabilita vždy.

Rovnice vedení tepla

Příklad

35.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;1);\ t > 0\}$$

$$u(x,0) = x^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0;1\rangle$$

$$u(0,t) = \operatorname{arctg}(t), \qquad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

b) Ověřte splnění podmínek souhlasu

c) Určete τ a minimální krok h tak, aby při jejím řešení stabilní explicitní metodou ležel bod $P = [0.25; 0.1]$ v prvé časové vrstvě

d) Pro hodnoty τ a h z bodu (b) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

e) Při $h = \tau = 0.25$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu užitím implicitní formule

36. Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;2);\ t > 0\}$$

b) Při zadaných podmínkách

$$u(x,0) = x(2-x), \qquad u(0,t) = 30t, \qquad u(2,t) = 0, \qquad \text{pro } x \in \langle 0;2\rangle,\ t \geq 0,$$

sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1$ aby pro daný krok v ose x bylo užité schema stabilní

Přednáška č. 11

- Metoda sítí pro vlnovou rovnici.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Formulace smíšené úlohy pro vlnovou rovnici

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínky**

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

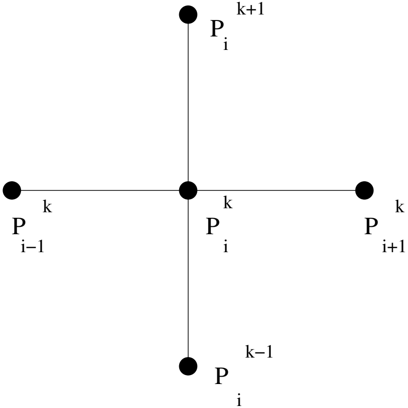
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

- **okrajové podmínky**

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

- Jsou splněny **podmínky souhlasu**.

Explicitní schema



- **Aproximace derivací**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

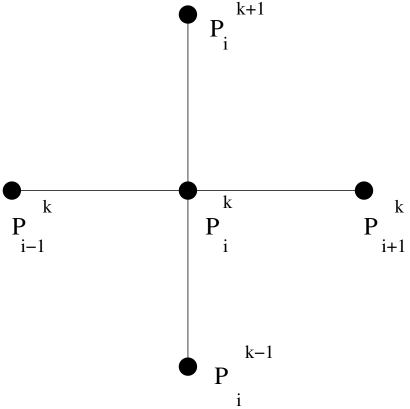
- Síť: Volíme krok $h = (b-a)/n$ a krok $\tau > 0$.

$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$

- Síťové uzly P^k a aproximace řešení U^k

Explicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu



- **Rovnice**:

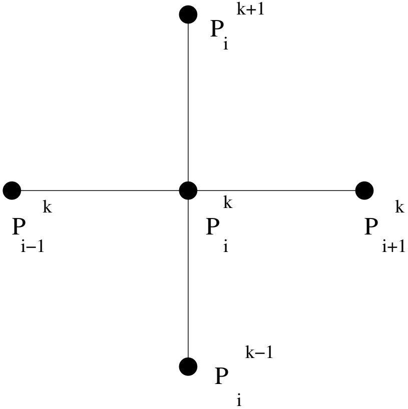
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^k:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{{}^2} = c^2 \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k$$

Explicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu



- Náhrada v uzlu P_i^k, **explicitní schéma**

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i+1}^k + 2(1-\sigma^2) U_i^k + \sigma^2 U_{i-1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k$$

- Stabilita:

$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1.$$

- Náhrada s chybou $O(\tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \tau) - u(x_i, 0)}{\tau} + O(\tau) \approx \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau}$$

- nebo-li

$$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + O(\tau^2)$$

Vlnová rovnice, explicitní schéma

- Lokální chyba aproximace - 2. centrální diference (viz Přednáška 7)
$$O(h^2 + \tau^2)$$
- Důležitá **stabilita**: $\sigma \leq 1$
- **Lze užít implicitního schématu**, tj. aby byla zaručena stabilita pro libovolné $\sigma \geq 0$?

Implicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu

- **Rovnice**:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Náhrada v uzlu P_i^k:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2}$$
- Dosadíme do rovnice, násobíme τ^2,
- označíme
$$\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$$
- vyjádříme soustavu pro U_i^{k+1}

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k-1} - (1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$$

Vlnová rovnice

Příklad

37. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) &= 1\ , \quad u(1,t) = \cos t \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$

c) Odvoďte síťové rovnice pro první časovou vrstvu při náhradě $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ s chybou $\mathcal{O}(\tau)$

d) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$. Užijte výsledky z bodů (b) a (c).

38.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-1)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1 - x)^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ u(0,t) &= \sin t\ , \quad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu.

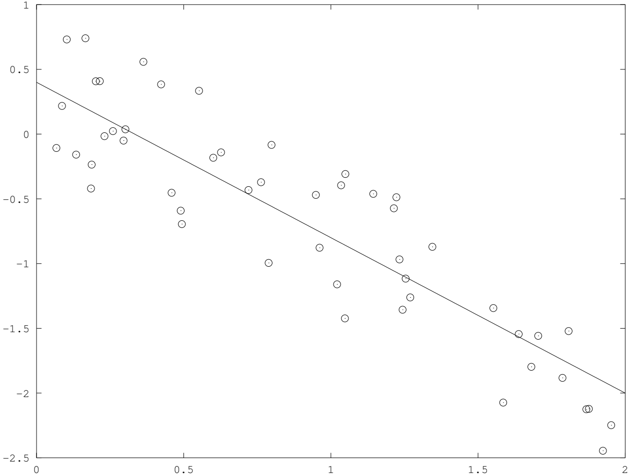
b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

Přednáška č. 12

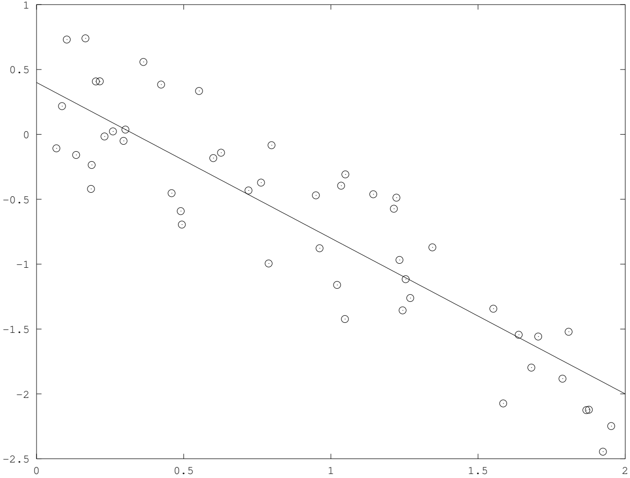
- Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců



- **Úloha:** Chceme najít závislost v naměřených datech - **obsahují nepřesnosti**,
- **Princip aproximace**: Hledáme takovou funkci v dané(m) množině(prostoru), která minimalizuje odchylku.

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců



- **Princip:** Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- **Volba funkce:** Např. polynom stupně n

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

- Princip: Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- dána tabulka dat $[x_i, y_i]$, minimalizujeme kvadratickou odchylku

$$G(a_0, a_1) := \delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- odvození normálních rovnic $\partial G / \partial a_k = 0$ pro $k = 0, 1$.
- soustava normálních rovnic

$$a_0(\sum_i 1) + a_1(\sum_i x_i) = \sum_i y_i,$$

$$a_0(\sum_i x_i) + a_1(\sum_i x_i^2) = \sum_i x_i y_i,$$

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

13.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Určete polynom p_1^* nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot:

x_i	-1	-1	0	1	1	2
y_i	0.5	-0.4	0.7	0.5	0.5	-0.4

14.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 2. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Určete polynom p_1^* nejvýše 2. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot. Určete odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-2	-1	-1	0	0	1	1	2
y_i	9.9	4	4.1	0.1	0.2	-2	-2.5	-1.8

Opakování

- Příklady.

Písemka (1., 2.)

1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-2	-1	-1	0	0	0	1	1	2
y_i	0.8	-0.58	-0.62	-1.2	-0.5	-1.3	0	-0.8	1.2

   a) Zapište podmínku, kterou má splňovat polynom nejvýše 2. stupně, který aproximuje tabulku hodnot x_i y_i metodou nejmenších čtverců. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro tento případ. **[8b]**
   b) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot a pro aproximaci polynomem $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně. Proveďte LU rozklad matice soustavy a užitím LU rozkladu vypočtěte přesné řešení soustavy. **[10b]**
   c) Určete polynom $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců. **[7b]**

2. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny postačujícípodmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy **[5b]**
   b) Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem $h = 1$ určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2$. **[10b]**
   c) Nechť y_i označuje hodnotu numerického řešení v bodě x_i získaného Collatzovou metodou a y_i^* hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu ε_i. Zapište jaká je závislost ε_i na kroku h a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě x při změně kroku z h na $h/4$ u Collatzovy metody. **[10b]**

Písemka (3., 4.)

3. Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - 4y = -\frac{2}{x}, \qquad y(1) = 1, y(5) = 0$$

   a) Danou rovnici převedte na samoadjungovaný tvar. Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy. Ověřte zda jsou splněny. **[8b]**
   b) Ukažte, že výraz $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ je aproximací $y'(x)$ pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$. Užitím tohoto vztahu odvoďte tvar síťových rovnic pro diskretizaci úlohy v samoadjungovaném tvaru metodou sítí s krokem h. **[8b]**
   c) Volte $h = 1$ a sestavte sít'ové rovnice pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru získanou v a). Je pro tuto soustavu rovnic Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte. **[9b]**

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2x}{t+1},$$

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = ax + b & & \text{pro } x \in < 0, 4 >, \\ u(0,t) = 2 + t & u(4,t) = -2 & \text{pro } t \in \langle 0, 10 \rangle \end{array}$$

   a) Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu a odvoďte síťovou rovnici v regulárním uzlu $(k+1)$-ní časové vrstvy při řešení dané úlohy implicitní metodou. Zapište podmínku stability pro implicitní metodu. **[10b]**
   b) Volte krok h a τ maximální tak, aby bod $A = [1; \frac{1}{2}]$ byl uzlem sítě implicitní metoda byla stabilní. Sestavte rovnice implicitního schematu na první časové vrstvě. **[9b]**
   c) Pro získanou soustavu rovnic z b) proveďte jeden krok Jacobiho iterační metody, počáteční iteraci volte jako nulový vektor (tj. $X^{(0)} = \vec{0}$). **[6b]**