Numerická matematika

Úvodní informace

Viz **http://mat.fs.cvut.cz**

- **Rozsah:** 2+2, Z, Zk , seminář 0+2 Z,
- **Obsah:** numerické metody pro lineární algebru, obyčejné a parciální diferenciální rovnice,
- **Zápočet:** požadavky, změny, 16 bodů ke zkoušce.
- **Zkouška:** 4 příklady, důraz na dif. rovnice.
- **Na semináři:** zkouška po částech.
- **Kontakt:** Petr Sváček, KD 201, konzultace ve středu 12:30-14:00 nebo po dohodě.
- Pro zájemce je otevřen předmět MMTA, ve středu od 16:30, kontakt J. Halama.
- Na přednášce: ukázky metod na jednoduchých příkladech.

Dnešní přednáška

- Soustavy lineárních rovnic, základní pojmy.
- Přímé metody řešení soustav.
- Princip iteračních metod.
- Vlastnosti matice soustavy.
- Iterační metody.

Soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Znalost pojmů:

- Hodnost matice, čtvercová, **regulární** a singulární matice.
- Frobeniova věta, existence a jednoznačnost řešení.
- **Gaussova eliminace.**
- **Determinant**, inverzní matice.
- **Vlastní číslo a vlastní vektor matice.**

Přímé metody řešení

$$\mathbb{A}x = b$$

Přímé metody jsou takové metody, které vedou k nalezení přesného řešení v předem známém počtu kroků.

Výhody: Vždy vedou k výsledku.

Nevýhody: Rychle rostoucí výpočetní a paměťová náročnost.

- **Gaussova eliminace.**
  operací $\approx n^3$, paměť $\approx n^2$
- **Inverzní matice.**
  operací $\approx n^3$, paměť $\approx n^2$
- **Cramerovo pravidlo.**
  operací ???
- Další přímou metodou je tzv. **LU rozklad.**
  operací $\approx n^3$, paměť $\approx n^2$

Proč LU rozklad?

Je-li soustava zapsaná ve tvaru

$$\mathbb{U}x = b$$

kde $\mathbb{U}$ je horní trojúhelníková matice, pak lze řešení nalézt pomocí $\approx n^2$ operací.

- Jedná se o tzv. zpětný chod **Gauss. eliminace.**
- Z poslední $n-$té rovnice vypočteme x_n, to dosadíme do předposlední. Atd.
- Je-li soustava zapsaná ve tvaru

  $$\mathbb{L}y = g,$$

  kde $\mathbb{L}$ je dolní trojúhelníková matice, postupujeme obdobně (od x_1).

LU rozklad

Postup řešení

- Uvažujme soustavu s maticí typu $n \times n$

$$\mathbb{A}x = b$$

- Provedeme rozklad $\mathbb{A}$ na dolní a horní trojúhelníkovou matici $\approx n^3$.

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$$

- Řešíme soustavu $\approx n^2$.

$$\mathbb{L}y = b$$

- Řešíme soustavu $\approx n^2$.

$$\mathbb{U}x = y$$

- U jedné z matic $\mathbb{L}$ a $\mathbb{U}$ lze volit diagonála libovolně.
- Volíme diagonálu $\mathbb{L}$, $l_{ii} = 1$.

Shrnutí: Přímé metody řešení

Přímé metody řešení $\mathbb{A}x = b$

- Zaručeno, že dosáhnou výsledku.
- Pro velký počet neznámých: rostoucí výpočetní náročnost $\approx n^3$.
- Rostoucí **paměťová náročnost** $\approx n^2$.
- *Pro speciální matice lze algoritmy zapsat efektivně (např. třídiagonální matice).*

Efektivnější řešení?

- V praxi se často vyskytují **velké řídké matice**, tj. matice, které obsahují *skoro všude* nuly.
- tj. matice s $n >> 10$, kde počet nenulových prvků odpovídá n.
- přímé metody $\approx n^3$ operací vs. maticové násobení $\approx n$,
- Řešení nemusíme znát přesně, stačí např. vědět jak jsme mu blízko.

Princip iteračních metod

Sestrojme posloupnost vektorů

$$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$$

tak aby konvergovala k přesnému řešení soustavy

$$\mathbb{A}x = b$$

Pokud tato posloupnost konverguje nezávisle na **počátečním přiblížení** $X^{(0)}$, říkáme, že odpovídající **metoda je konvergentní**.

Konvergence metody závisí na vlastnostech matice A.

Konvergenci měříme jako velikost/normu vektoru $X^{(k)} - X^*$.

Norma matice a vektoru

- Řádková norma

$$\|\mathbf{A}\|_m = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_m = \max_i |x_i|$$

- Sloupcová norma

$$\|\mathbf{A}\|_\ell = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \qquad \|\vec{x}\|_\ell = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Euklidovská norma

$$\|\mathbf{A}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|\vec{x}\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Vlastnosti matice

Matice A je

- **ostře diagonálně dominantní** (ODD), pokud
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
- **symetrická**, pokud
$$a_{ij} = a_{ji}$$
- **pozitivně definitní** pokud pro libovolný nenulový vektor $x \neq \vec{0}$ platí
$$\sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j > 0$$
- **spektrální poloměr** matice $\mathbb{A}$ je číslo $\rho(\mathbb{A})$ definované
$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ je vlastní číslo } \mathbb{A}\}$$

Prostá iterační metoda

Soustava tvaru

$$x = Ux + V,$$

Iterační metoda

$$X^{(k+1)} = UX^{(k)} + V,$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní. Navíc platí

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|^k}{1 - \|U\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Odvození klasických iteračních metod

Vezmeme postupně rovnici $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ a z té nalezneme x_i:

$$\sum_{j<i} a_{ij} x_j + \mathbf{a}_{ii} x_i + \sum_{j>i} a_{ij} x_j = b_i$$

Dostáváme rovnici zapsanou ve tvaru

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j - \sum_{j>i} a_{ij} x_j \right)$$

Jacobiho iterační metoda (složkový zápis)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{\mathbf{a}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

V maticovém zápise lze udělat totéž pomocí rozštěpení matice $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$, dostáváme rovnost

$$\mathbb{D}x = -(\mathbb{P} + \mathbb{L})x + b$$

Přednáška č. 2

- Opakování: Prostá a Jacobiho iterační metoda.
- Gauss-Seidelova iterační metoda.
- Gradientní metody.

Prostá iterační metoda

Soustava tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{x} + \mathbf{V},$$

Iterační metoda

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbb{U}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{V},$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní. Navíc platí

$$\|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|}{1 - \|\mathbb{U}\|}\|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)}\|,$$

$$\|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|\mathbb{U}\|^k}{1 - \|bbU\|}\|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|,$$

Prostá iterační metoda: Příklad.

Př. 1. Určete všechna $p \in R$, pro která konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $X = UX + V$, kde $V = (-1, 2, 0.5)^T$,

$$U = \begin{pmatrix} -0.8 & p^2 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & p \end{pmatrix},$$

Pro $p = 0.2$, $X^{(0)} = V$ určete $X^{(1)}$ touto metodou.

Př. 2. Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{s}$, kde $\vec{s} = (1.7, -1.8, 0.5)^T$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & t+1 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & t+0.5 \end{pmatrix}$$

Určete všechna $t \in \mathcal{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu. Pro $t = -0.5$ určete $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Vypočtěte $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|_m$. Odhadněte chybu.

Jacobiho iterační metoda

Pro $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$\mathbb{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbb{L} + \mathbb{P})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a Jacobiho iterační metoda

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{P})}_{U_J}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}}_{V_J}.$$

Platí

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, pak Jacobiho iterační metoda je konvergentní.
- Jacobiho iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_J) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_J$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Jacobiho iterační metoda: Příklad.

Př. 3. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte Jacobiho iterační metodou $X^{(1)}$.

Př. 4. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte Jacobiho iterační metodou $X^{(1)}$.

Složkový zápis klasických iteračních metod

- **Jacobiho iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- **Gauss-Seidelova iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Gauss-Seidelova iterační metoda

Pro $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zapíšeme $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$(\mathbb{D} + \mathbb{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbb{P}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a tedy iterační metodu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbb{P}}_{\mathbb{U}_{GS}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbf{b}}_{V_{GS}}.$$

Platí

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, pak je GS iterační metoda konvergentní.
- Je-li matice $\mathbb{A}$ SPD, pak je GS iterační metoda konvergentní.
- GS iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_{GS}) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_{GS}$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Jacobiho iterační metoda: Příklad.

Př. 5. Dána soustava lineárních rovnic $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ p & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna některá z postačujících podmínek konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Př. 6. Dána soustava

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek (pro matici A, ne U_G) Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Gradientní metoda

- **Předpoklady:** Matice A symetrická a pozitivně definitní. $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$.
- **Ekvivalence:**

$$\left(\quad \mathbb{A}x^* = \mathbf{b} \quad \right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}) \qquad \text{pro libovolné } \mathbf{x}\right).$$

- **Gradientní metoda:**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{p}$$

- **Volba směru (největší spád):**

$$\mathbf{p} = -\operatorname{grad} F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}.$$

- **Volba optimálního kroku ve směru p**

$$\alpha = \operatorname*{argmin}_{\alpha} F\left(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{p}\right) = \frac{\mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x})}{\mathbf{p}^T \mathbb{A}\mathbf{p}}$$

Přednáška č. 3

- **Soustavy nelineárních rovnic.** Problémy existence a jednoznačnosti řešení.
- Iterační metody řešení soustav nelineárních rovnic – Newtonova metoda.
- **Princip interpolace.**
- Interpolace algebraickým mnohočlenem, jeho existence a jednoznačnost.

Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Systém n-rovnic o n-neznámých

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- funkce $f_i(x)$ jsou obecně nelineární
- speciální volba $\rightarrow$ soustava lineárních rovnic
- není zaručena existence řešení
- není zaručena jednoznačnost řešení
- viz jedna rovnice pro $a = 1$ nebo $a = -1$

$$x^2 + a = 0$$

Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Systém 2-rovnic o 2-neznámých

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

- pro zjednodušení jen tyto rovnice

Př. 7. Je dána soustava rovnic

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \qquad y = 2\cos(\pi x)$$

Graficky znázorněte přibližný počet a polohu kořenů této soustavy nelineárních rovnic.

Př. 8. Je dána soustava rovnic

$$\frac{1}{2x} - y = 0 \qquad x^2 + 4y^2 = 4$$

Určete graficky přibližnou polohu všech kořenů soustavy.

V bodě x^k užijeme Taylorův polynom

$$0 = f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x^k}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x^k})(\mathbf{x} - \mathbf{x^k}) + R_2(x)$$

Zanedbáním dostaneme vzorec pro $x \approx x^{k+1}$

$$x^{k+1} = x^k - \left(f'(x^k)\right)^{-1} f(x^k).$$

Obecný vzorec pro soustavu $F(x) = 0$? Co je $F'(x)$?

Newtonova metoda - odvození

Odvození pro 2 nelineární rovnice o 2 neznámých

Označme $k-$té přiblížení jako $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$

$$0 = f(x^*, y^*) = f(A) + f_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + f_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

$$0 = g(x^*, y^*) = g(A) + g_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + g_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

Zanedbáme-li další členy Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + \quad & f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0, \\ g_x(A)\Delta_x + \quad & g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0, \end{aligned}$$

dostáváme soustavu lineárních rovnic pro

$$\Delta_x = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \qquad \Delta_y = y^{(k+1)} - y^{(k)}.$$

Newtonova iterační metoda

1. Zvolíme počáteční přiblížení $[x^0, y^0]$.
2. Postupně pro $k = 0, 1, \ldots$

a) Sestavíme soustavu rovnic v bodě $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$,

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0 \\ g_x(A)\Delta_x + g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0 \end{aligned}$$

b) Najdeme řešení této soustavy Δ_x, Δ_y

c) Spočteme nové přiblížení

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

Není zaručena konvergence k řešení.
Metoda může selhat (viz b))
Konvergence závisí na počátečním přiblížení.

Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Problémy existence a jednoznačnosti řešení

Př. 9. Je dána soustava rovnic

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \qquad y = 2\cos(\pi x)$$

a) Graficky znázorněte přibližný počet a polohu kořenů této soustavy nelineárních rovnic.

b) Volte $\vec{x}^{(0)} = (-0.5; -1)^T$ a vypočtěte $\vec{x}^{(1)}$ Newtonovou metodou

c) Určete $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\ell$

Př. 10. Je dána soustava rovnic

$$\frac{1}{2x} - y = 0 \qquad x^2 + 4y^2 = 4$$

a) Graficky znázorněte přibližný počet a polohu kořenů této soustavy nelineárních rovnic.

b) Volte $\vec{x}^{(0)} = (1; 0)^T$ a vypočtěte $\vec{x}^{(1)}$ Newtonovou metodou

c) Určete $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_m$

Interpolace funkce

- Interpolace funkce: Pro funkci $f(x)$ danou tabulkou hodnot (x_i, y_i) hledáme takovou funkci z nějaké množiny funkcí, která v bodech x_i nabývá hodnot y_i.
- Hledáme $p(x)$ takovou, že pro libovolné i platí

$$p(x_i) = y_i$$

- Interpolace polynomem $p(x)$ je polynom.
- Existence, jednoznačnost, stupeň polynomu ?

Interpolace funkce polynomem

Př. 11. Vysvětlete princip interpolace tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 0, \dots, n$ polynomem. Je dána tabulka hodnot

x_i	0	1	2
y_i	2	2	4

Určete interpolační polynom p^* pro danou tabulku hodnot.

Užitím interpolačního polynomu určete přibližnou hodnotu funkce v bodě 0.5.

Př. 12 Vysvětlete princip interpolace tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 0, \dots, n$ polynomem. Uveďte podmínku, která zaručuje existenci takového polynomu.

Je dána tabulka hodnot

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	-2	1	4

Určete interpolační polynom p^* pro danou tabulku hodnot.

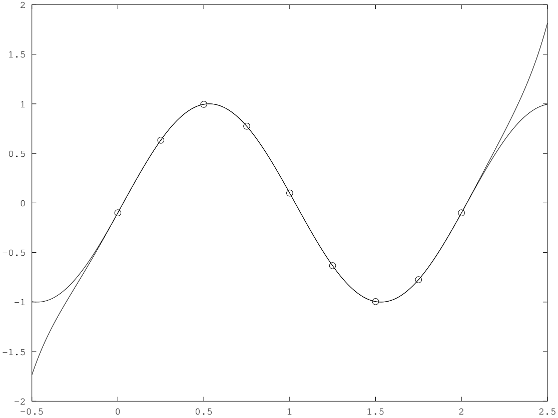
Užitím interpolačního polynomu určete přibližnou hodnotu funkce v bodě $x = -0.5$.

Přednáška č. 4

- **Princip interpolace pomocí kubických spline-funkcí.**
- Výhody tohoto typu interpolace.
- **Aproximace metodou nejmenších čtverců – princip, aproximace algebraickým mnohočlenem.**
- Odvození soustavy normálních rovnic.

Interpolace polynomem

Interpolace hladké funkce

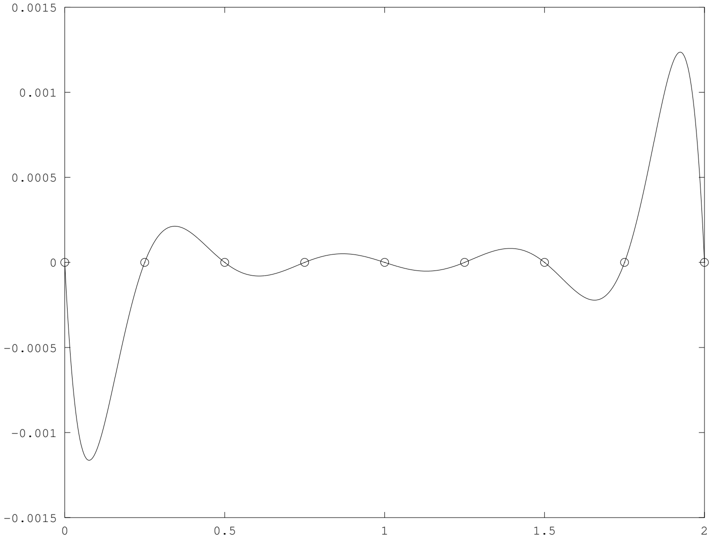


- Interpolace hladké funkce, platí odhad ($C \approx |\max f^{(n+1)}(x)|$)

$$|f(x) - p_n(x)| \leq Ch^n$$

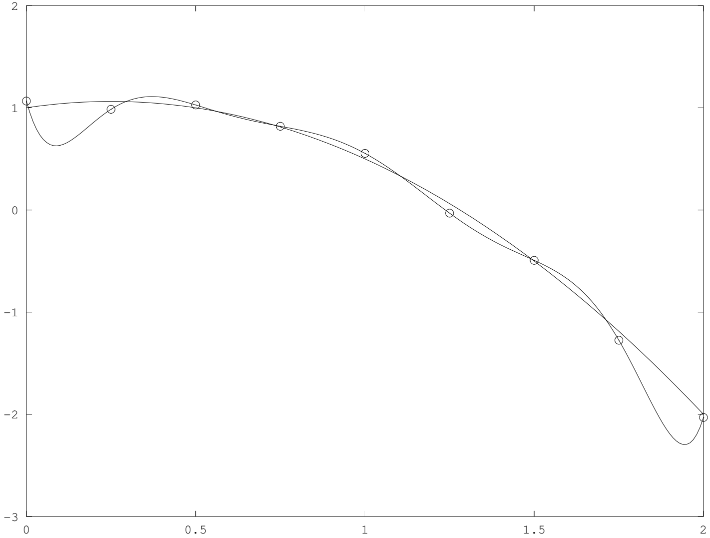
Chyba interpolace

Chyba interpolace hladké funkce



Nevýhody interpolace

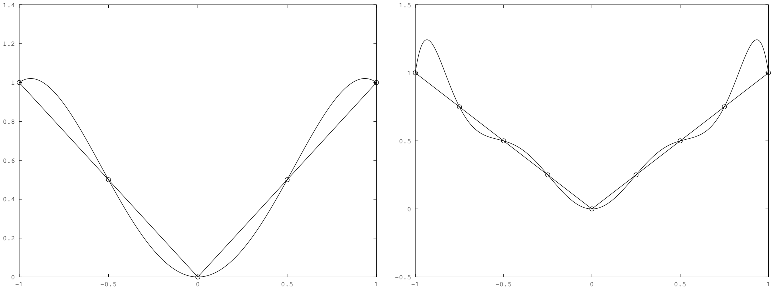
1. Interpolace je citlivá na přesné hodnoty funkce.



Interpolace kvadratického polynomu(!) s náhodnou 5 procentní odchylkou

Nevýhody interpolace

2. Interpolace je výhodná pro interpolaci jen hladké funkce.

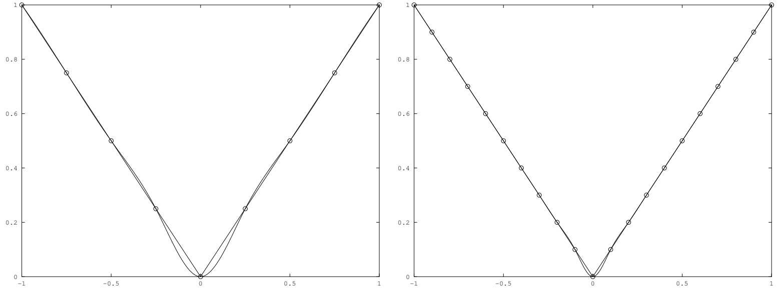


Interpolace $f(x) = |x|$ polynomem.

Nevýhody interpolace

- Interpolace je citlivá na přesné hodnoty funkce.
- Interpolace je výhodná pro interpolaci jen hladké funkce.
- **Chyba nemá lokální charakter**.
- **Interpolace polynomem nezachovává monotonii, konvexitu, konkávitu funkce**.
- Jiný druh interpolace: po částech polynomiální funkce.

Interpolace spline funkcemi



Interpolace $f(x) = |x|$ splinem.

Interpolace spline funkcemi

- Tabulka $x_i, y_i,\ i = 0, \ldots, n$.

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

- Na každém intervalu je spline $s(x)$ kubická funkce, tj.

$$s(x) = a_0(x-x_i)^3+b_0(x-x_i)^2+c_0(x-x_i)+d_0,\ \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle.$$

- Celkem neznámých: $4\,n$.
- Podmínek interpolace: $\qquad n+1$.

$$s(x_i) = y_i$$

Interpolace spline funkcemi

- Tabulka $x_i, y_i,\ i = 0, \ldots, n.$
$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$
- Na každém intervalu je spline $s(x)$ kubická funkce, tj.
$$s(x) = a_0(x-x_i)^3 + b_0(x-x_i)^2 + c_0(x-x_i) + d_0,\ \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle.$$
- Celkem neznámých: $4\,n$.
- Podmínek interpolace: $n+1.$
$$s(x_i) = y_i$$
- Podmínek spojitosti: $n-1.$
$$s(x_{i\,-}) = s(x_{i\,+})$$

Interpolace spline funkcemi

- Tabulka $x_i, y_i,\ i = 0, \dots, n$.

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

- Na každém intervalu je spline $s(x)$ kubická funkce, tj.

  $s(x) = a_0(x-x_i)^3+b_0(x-x_i)^2+c_0(x-x_i)+d_0,\ $ pro $x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$.

- Celkem neznámých: $4\,n$.
- Podmínek interpolace: $n+1$.

$$s(x_i) = y_i$$

- Podmínek spojitosti: $n-1$.

$$s(x_{i\,-}) = s(x_{i\,+})$$

- Podmínek spojitosti s' a s'' : $2(n-1)$.

$$s'(x_{i\,-}) = s'(x_{i\,+}), \qquad s''(x_{i\,-}) = s''(x_{i\,+})$$

Interpolace spline funkcemi

- Tabulka $x_i, y_i,\ i = 0, \ldots, n$.
$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$
- Na každém intervalu je spline $s(x)$ kubická funkce, tj.
$$s(x) = a_0(x - x_i)^3 + b_0(x - x_i)^2 + c_0(x - x_i) + d_0,\ \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle.$$
- Celkem neznámých: $4\,n$.
- Podmínek interpolace: $n + 1$.
$$s(x_i) = y_i$$
- Podmínek spojitosti: $n - 1$.
$$s(x_{i\,-}) = s(x_{i\,+})$$
- Podmínek spojitosti s' a s'' : $2(n - 1)$.
$$s'(x_{i\,-}) = s'(x_{i\,+}), \qquad s''(x_{i\,-}) = s''(x_{i\,+})$$
- Celkem: $4n - 2$. Přidáme např. podmínku pro přirozený spline.
$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0.$$

- Z tabulky hodnot x_i, y_i, $i = 0, \ldots, n$ sestavíme soustavu rovnic pro $m_i = s''(x_i)$,

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

- Na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ známe 4 hodnoty:

$$s(x_i) = y_i, s(x_{i+1}) = y_{i+1}, s''(x_i) = m_i, s''(x_{i+1}) = m_{i+1}.$$

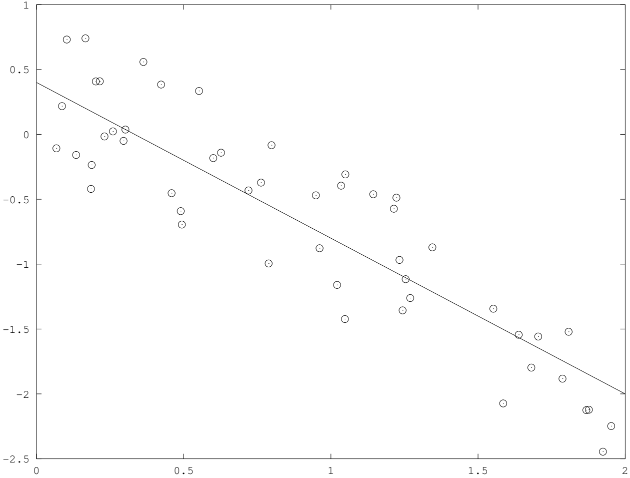
- Kubická funkce na každém intervalu je tedy určena jednoznačně.

Interpolace spline funkcemi

Vlastnosti spline funkce.

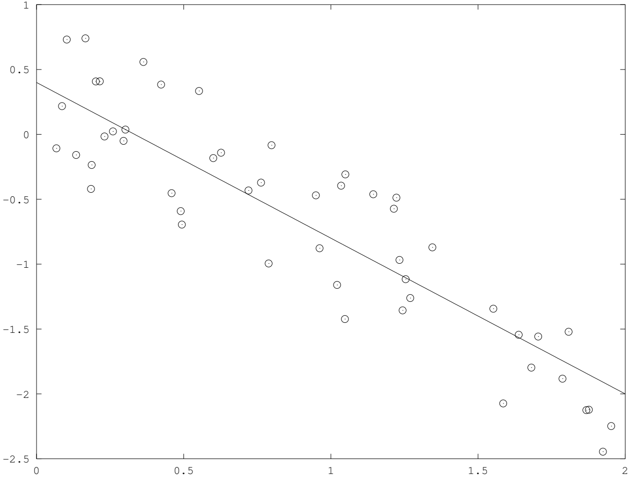
- po částech kubická funkce
- spline interpolant minimalizuje *energii*
- spline zachovává monotonii
- chyba interpolace má lokální charakter
- Nevýhoda: nutné řešit soustavu rovnic, ale ta je 3diagonální.

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců



- **Úloha:** Chceme najít závislost v naměřených datech - **obsahují nepřesnosti**,
- **Princip aproximace**: Hledáme takovou funkci v dané(m) množině(prostoru), která minimalizuje odchylku.

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců



- **Princip:** Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- **Volba funkce:** Např. polynom stupně n

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

- Princip: Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- dána tabulka dat $[x_i, y_i]$, minimalizujeme kvadratickou odchylku

$$G(a_0, a_1) := \delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- odvození normálních rovnic $\partial G / \partial a_k = 0$ pro $k = 0, 1$.
- soustava normálních rovnic

$$a_0(\sum_i 1) + a_1(\sum_i x_i) = \sum_i y_i,$$

$$a_0(\sum_i x_i) + a_1(\sum_i x_i^2) = \sum_i x_i y_i,$$

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

13.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Určete polynom p_1^* nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot:

x_i	-1	-1	0	1	1	2
y_i	0.5	-0.4	0.7	0.5	0.5	-0.4

14.a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci tabulky hodnot (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, n$ polynomem nejvýše 2. stupně.

b) Odvoďte obecně soustavu normálních rovnic pro případ (a).

c) Určete polynom p_1^* nejvýše 2. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot. Určete odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-2	-1	-1	0	0	1	1	2
y_i	9.9	4	4.1	0.1	0.2	-2	-2.5	-1.8

Přednáška č. 5

- Numerické řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici 1.řádu a pro soustavu v normálním tvaru.
- Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu jako speciální případ.
- Eulerova metoda 1. řádu

Obyčejná diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

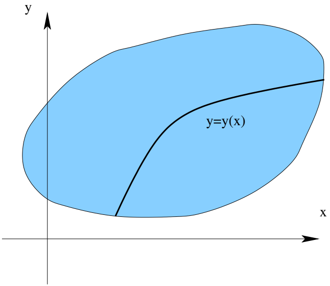
- Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu: Hledáme funkci $y = y(x)$ takovou, že

$$y' = f(x, y)$$

- Cauchyova úloha pro ODR 1. řádu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení: f, f_y spojité v oblasti $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$.



15. Je dána Cauchyova úloha

$$y'(y-4) = x + \sqrt[3]{1-y}, \qquad y(3) = 2,$$

Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

16. Je dána Cauchyova úloha

$$y' = \ln(x^2 + y^2 - 4), \qquad y(-2) = 2$$

Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

Cauchyova úloha soustavu rovnic v normálním tvaru

- Vektorový zápis

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}^0.$$

- kde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix},$$

- Podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení: f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ spojité v oblasti $\mathcal{G} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

17. Je dána Cauchyova úloha

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -\ln \frac{x}{y_2} - 2\sqrt{x+4} \end{pmatrix}, \qquad y(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

18. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2 + \ln(x-1) + 1 \\ x\sqrt{4 - y_1} - 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu jako speciální případ

- **C. Ú. pro rovnici n-tého řádu**

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

- **Příklad.**

$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

- **Podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení:**

G, $\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial y'}$, $\ldots$ spojité v oblasti $\mathcal{G}$.

Převod na soustavu rovnic v normálním tvaru

- **Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu**

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad \dots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

- **Převod na soustavu rovnic**

$$\begin{aligned} Y_1 &= y, & Y_1' &= Y^2, \\ Y_2 &= y', & Y_2' &= Y^3, \\ &\vdots & &\vdots \\ Y_{n-1} &= y^{(n-1)}, & Y_{n-1}' &= G(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}). \end{aligned}$$

Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu jako speciální případ, převod na soustavu rovnic v normálním tvaru

Příklad

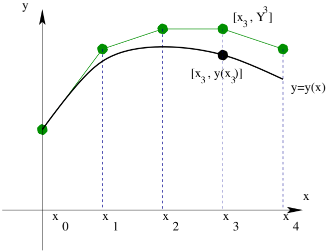
19. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' - yy'' + \frac{y'}{y} \ln x = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad y(3) = -1,\ y'(3) = 0, y''(3) = 0.$$

a) Zapište oblast, kde jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení dané C. Ú.

b) Převeďte danou úlohu na soustavu rovnic 1. řádu.

Princip numerického řešení



- **Přesné řešení:** $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.
- **Přibližné řešení Y^i:** krok $h = (b - a)/n$,

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, \dots, n,$$

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- **Jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Lokální chyba, globální chyba metody.

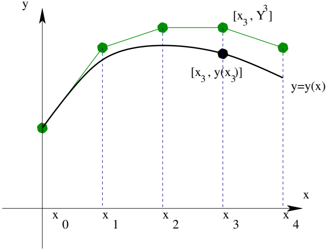
Princip numerického řešení

- **Přesné řešení:** $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.
- **Přibližné řešení Y^i v bodech x_i.**
- **Jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Přírůstková funkce: $\Phi(x_i, Y^i, h)$
- Lokální a globální chyba metody.
- Stabilita metody.
- Symboly $O(h^p)$ a $o(h^p)$.
- **Řád konvergence metody.**

Eulerova metoda



- Cauchyova úloha

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Volíme $Y^0 = y_0$. Pak pro $i = 0, \ldots,$ počítáme

$$Y^{i+1} = Y^i + hf(x_i, Y^i)$$

- Globální chyba metody: $O(h)$.

22. Je dána Cauchyova úloha

$$y'(y-4) = x + \sqrt[3]{1-y}, \qquad y(3) = 2,$$

a) S krokem $h = 0.5$ určete přibližnou hodnotu $y(4)$ pomocí Eulerovy metody.

20. Je dána Cauchyova úloha

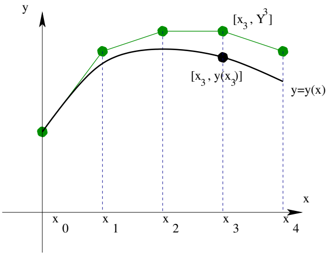
$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1 \mathrm{tg} x + y_3 - 2 \\ y_1 + y_2 \ln(x+1) \\ y_1 + 2y_2 - \frac{1}{x-2} y_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ověřte, že Cauchyova úloha má právě jedno řešení
b) Zapište interval $\mathcal{I}$ jejího maximálního řešení
c) S krokem $h = 0.2$ určete přibližnou hodnotu $\vec{y}(1.2)$ pomocí Eulerovy metody

Přednáška č. 6

- Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutty.
- Collatzova metoda (E1), RK4. Konvergence metod.
- Praktické užití metod.

Eulerova metoda



- Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- Taylorův rozvoj

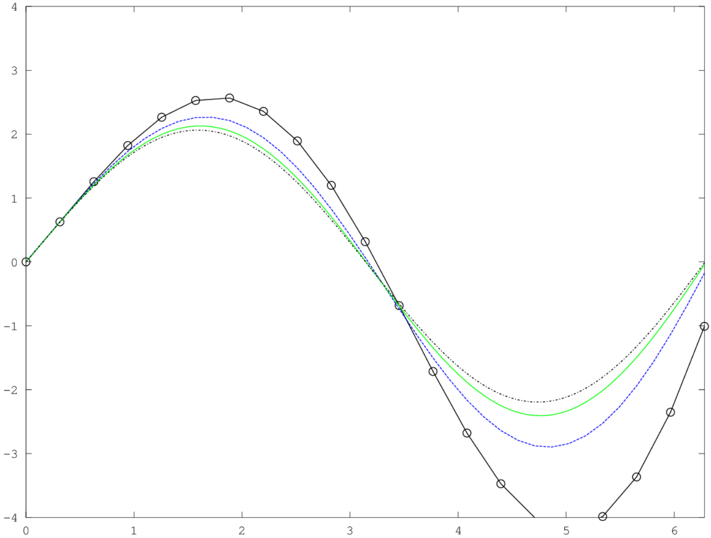
$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + O(h^2)$$

- Eulerova metoda

$$Y^{k+1} = Y^k + hf(x_k, Y^k)$$

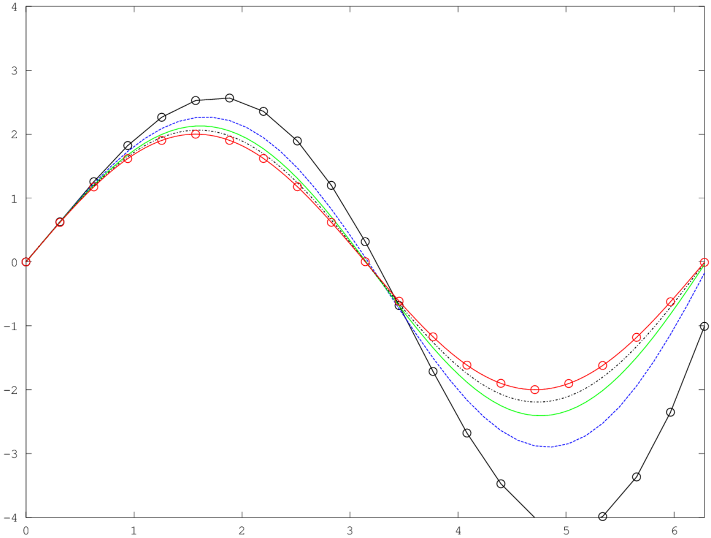
- Metoda je pouze 1. řádu přesnosti.

Eulerova metoda



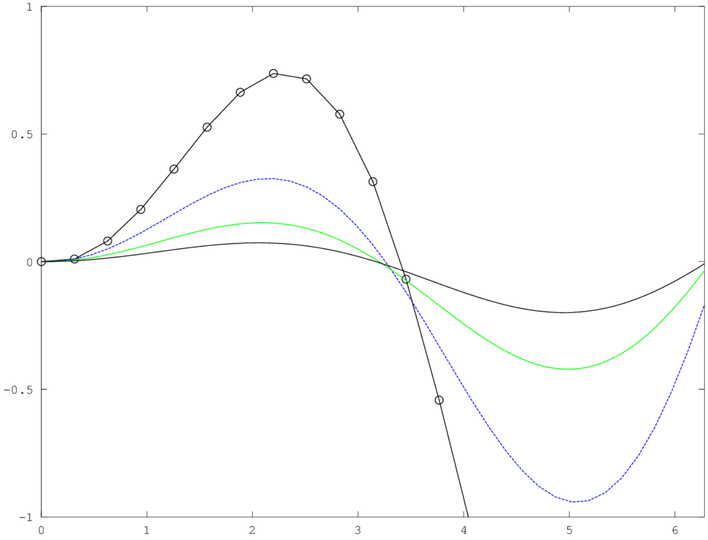
- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20, 2\pi/40, , 2\pi/80, 2\pi/160$.

Eulerova metoda - srovnání s přesným řešením



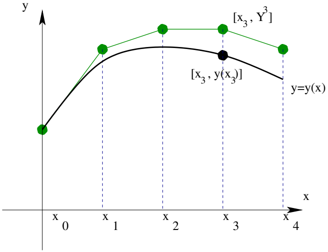
- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20, 2\pi/40, , 2\pi/80, 2\pi/160.$

Eulerova metoda - chyby v závislosti na kroku h



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20$, $2\pi/40$, , $2\pi/80$, $2\pi/160$.

Metody vyššího řádu



- Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- Metody Taylorova rozvoje

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

- Zderivováním dostaneme

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(f(x, y(x))) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

- Získaná metoda je druhého řádu přesnosti, ale ...

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutta

- **Obecná jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Metody RK: Speciální volba přírůstkové funkce $\Phi(x_i, Y^i, h)$

$$\Phi(x_i, Y^i, h) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i k_i$$

- kde

$$k_i = f(x_i + \alpha_i h, Y^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_i)$$

- Volba koeficientů: co nejvyššího řád konvergence.

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutta: Případ n = 2.

- Metody RK2

$$Y^{i+1} = Y^i + h(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)$$

-

$$k_1 = f(x_i, Y^i)$$

$$k_2 = f(x_i + \alpha_2 h, Y^i + \beta_{21} k_1)$$

- Volba 4 koeficientů: $\omega_1, \omega_2, \alpha_2, \beta_{21}$.
- Volbou lze dosáhnout 2. řád přesnosti.

Princip jednokrokových metod typu Runge-Kutty.

Collatzova metoda:

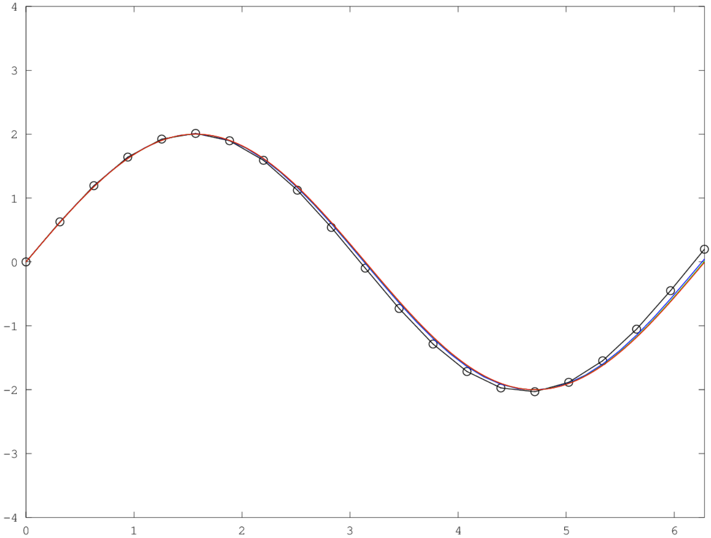
$$Y^{i+1} = Y^i + hk_2$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, Y^i + h/2k_1),$$

$$k_1 = f(x_i, Y^i),$$

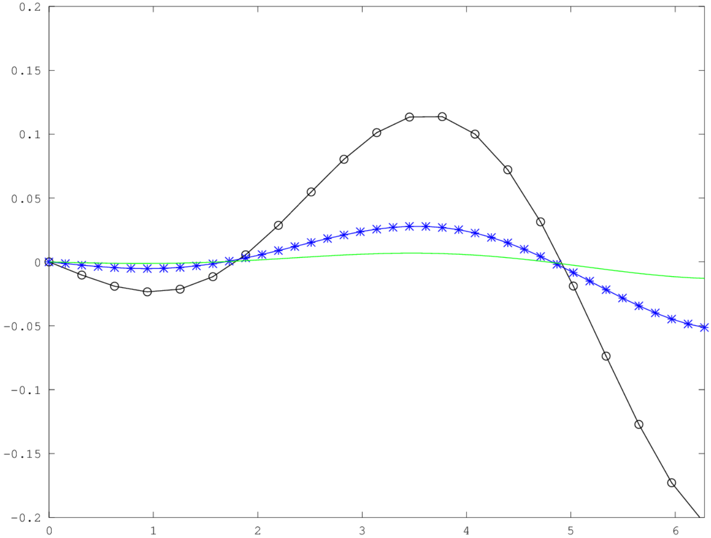
Řád metody: $O(h^2)$.

Collatzova metoda - srovnání s přesným řešením



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20,\ 2\pi/40,\ ,\ 2\pi/80.$

Collatzova metoda - chyby v závislosti na kroku h



- Konvergence k řešení pro $h = 2\pi/20,\ 2\pi/40,\ ,\ 2\pi/80.$

Metoda Runge-Kutty 4. řádu.

Runge-Kutta 4. řádu:

$$Y^{i+1} = Y^i + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_i, Y^i),$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, Y^i + h/2k_1),$$

$$k_3 = f(x_i + h/2, Y^i + h/2k_2),$$

$$k_4 = f(x_i + h, Y^i + hk_3),$$

Řád metody: $O(h^2)$.

Řád konvergence metod typu Runge-Kutty.

- $$Y^{i+1} = Y^i + h\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i k_i\right),$$
- kde
$$k_i = f(x_i + \alpha_i h, Y^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_i)$$
- Řád konvergence:

n	p
1	1
2	2
3	3
4	4
5	4
6	5

Příklady - Cauchyova úloha.

21. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny postačujícípodmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem $h = 1$ určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2$.

c) Nechť y_i označuje hodnotu numerického řešení v bodě x_i získaného Collatzovou metodou a y_i^* hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu ε_i. Zapište jaká je závislost ε_i na kroku h a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě x při změně kroku z h na $h/4$ u Collatzovy metody.

22. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' - yy'' + \frac{y'}{y}\ln x = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad y(3) = -1,\ y'(3) = 0, y''(3) = 0.$$

Určete s krokem $h = 0,4$ pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení $y''(3.4)$.

Přednáška č. 7

- Problematika řešení okrajových úloh pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu, porovnání s Cauchyovou úlohou.
- Existence a jednoznačnost řešení. Samoadjungovaný tvar rovnic
- Metoda sítí.

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Formulace okrajové úlohy

- Lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

- Okrajové podmínky (Sturmovy okrajové podmínky):

$$\alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3.$$

- Speciální volba

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Formulace okrajové úlohy

- Lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

- Okrajové podmínky (Sturmovy okrajové podmínky):

$$\alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3.$$

- Speciální volba
- Neumannovy okrajové podmínky

$$y'(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta.$$

- **Dirichletovy okrajové podmínky**

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta.$$

- **Newtonovy okrajové podmínky**

$$y(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta.$$

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Existence řešení

- Uvažujeme úlohu

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

$$\alpha_1 y'(a) - \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3.$$

- Kdy existuje funkce $y(x)$ - řešení této úlohy?
- Pokud existuje - je dáno jednoznačně?
- Problém existence a jednoznačnosti řešení je **pro okrajovou úlohu mnohem komplikovanější** než pro úlohu Cauchyovu (počáteční)!
- Spojitost koeficientů (ani vyšších řádů) není postačující podmínkou!

Srovnání s Cauchyovou úlohou

Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Formulace jednoduché okrajové úlohy:

$$y''(x) = f(x), \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

Formulace Cauchyovy úlohy:

$$y''(x) = f(x), \qquad y(a) = A, y'(a) = K.$$

Př.

$$y''(x) = \sin x, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -1.$$

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

Existence a jednoznačnost řešení pro jednoduchou úlohu

Formulace jednoduché okrajové úlohy:

$$y''(x) = f(x), \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

Je-li $f(x)$ spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, pak existuje právě jedno řešení.
Př.

$$y''(x) = \sin x, \qquad y(0) = 2, y(\pi) = -2.$$

Toto ale neplatí vždy ...

Formulace jednoduché okrajové úlohy:

$$y''(x) = f(x), \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

Je-li $f(x)$ spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, pak existuje právě jedno řešení.

Př.

$$y''(x) = \sin x, \qquad y(0) = 2, y(\pi) = -2.$$

Toto ale neplatí vždy ...

Okrajová úloha: Existence a jednoznačnost řešení

Příklady úloh, které nemají jednoznačná řešení

- Okrajová úloha, která nemá řešení

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 1.$$

- Okrajová úloha s nejednoznačným řešením

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Okrajová úloha: Existence a jednoznačnost řešení

Příklady úloh, které nemají jednoznačná řešení

- Okrajová úloha, která nemá řešení

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 1.$$

- Okrajová úloha s nejednoznačným řešením

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

- **Okrajová úloha s právě jedním řešením**

$$-y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Okrajová úloha: Existence a jednoznačnost řešení

Samoadjungovaný tvar úlohy

V technických úlohách má diferenciální rovnice často tvar

$$-(py')' + qy = f,$$

- Konstanty p, q jsou materiálové konstanty, většinou kladné nebo nezáporné.
- Obecně pro neizotropní materiál lze uvažovat p, q jako nezáporné funkce

$$p = p(x), \qquad q = q(x).$$

Samoadjungovaný tvar rovnice:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

Samoadjungovaný tvar úlohy.

Samoadjungovaný tvar rovnice:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

Dirichletovy ukrajové podmínky

$$y(a) = A, \qquad\qquad y(b) = B.$$

Existence a jednoznačnost řešení pro úlohy v samoadjungovaném tvaru

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x),$$

Dirichletovy ukrajové podmínky

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B.$$

Nechť platí

(i) $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - spojité funkce na $\langle a, b \rangle$

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a, b \rangle$

Pak existuje právě jedno řešení.

Převod na samoadjungovaný tvar

Zápis úlohy v samoadjungovaném tvaru (rozderivujeme závorku)

$$-p(x)y'' - p'(x)y' + q(x)y = f(x),$$

a v normálním tvaru

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

po přenásobení dostaneme

$$-p(x)y'' - p(x)f_1(x)y' - p(x)f_2(x)y = -p(x)g(x).$$

Srovnáním koeficientů:

$$-p' = pf_1(x), \qquad q(x) = -p(x)f_2(x), \qquad f(x) = -p(x)g(x).$$

Převod na samoadjungovaný tvar. Příklady.

23. Formulujte Dirichletovu úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.řádu v samoadjungovaném tvaru

a) Uveďte podmínky pro jednoznačnou řešitelnost úlohy (a)

b) Zdůvodněte, zda jsou postačující podmínky splněny pro úlohu

$$-(xy')' + \frac{3-x}{x}y = -\ln(2+x) \qquad y(1) = 0,\, y(2) = -4$$

24. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (c-x)y + x^2 = 0 \qquad y(2) = -1,\, y(4) = 3$$

a) Danou rovnici převeďte na samoadjungovaný tvar

b) Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathcal{R}$, pro něž jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy

25. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{4}{x^2-4}y = 1 \qquad y(3) = 0,\, y(5) = -1$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení

b) Odvoďte soustavu síťových rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.5$

26. Je dána rovnice

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}$$

a) Určete intervaly maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici

b) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro danou rovnici s okrajovými podmínkami $y(-5) = -2,\, y(-3) = 0$

Princip numerického řešení

- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b \rangle$.
- Interval I rozdělíme ekvidistantně s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme } q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- Budeme hledat **přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$-\left(py'\right)' \approx ???$$

Symbol $O(h^p)$, Talorův polynom

- Píšeme $g(h) = O(h^p)$ pokud platí ($C \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{|g(h)|}{|h|^p} = C > 0,$$

- Označme $x = x_0 + h$, pak $x - x_0 = h$, a platí pro dostatečně hladkou funkci $f(x)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + O(h^3)$$

Náhrada derivace diferencí

- V bodě $x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + O(h^4)$$

- V bodě $x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + O(h^4)$$

Užitečné vztahy:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + O(h^2),$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = f'(x_0)2h + O(h^3),$$

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x) = f''(x_0)h^2 + O(h^4).$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru

- **Užijeme vztah**

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \approx f'(x_0)$$

- v bodě x_i s krokem $h/2$ pro aproximaci výrazu $z' = (py')'$

$$z'(x_i) \approx \frac{z(x_{i+\frac{1}{2}}) - z(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

kde $x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}$,

- dále

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1}-Y^i}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^i - Y^{i-1}}{h}$$

- tím dostaneme

$$-\left(py'\right)' \approx \frac{-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1}}{h^2}$$

Princip numerického řešení

- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b \rangle$.
- Interval I rozdělíme ekvidistantně s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme } q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- Budeme hledat **přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$-\left(py'\right)' \approx \frac{-p_{i-1/2}Y^{i-1} + (p_{i+1/2} + p_{i-1/2})Y^i - p_{i+1/2}Y^{i+1}}{h^2}$$

- **Řád lokální chyby:** $O(h^2)$

Přednáška č. 8

- Numerické řešení Dirichletovy úlohy.
- Princip metody sítí, konvergence metody.
- Existence a jednoznačnost řešení vzniklé soustavy lineárních rovnic.

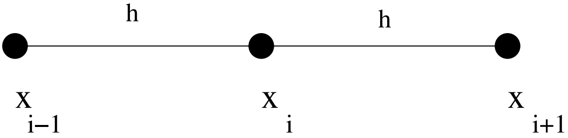
Princip numerického řešení

Dirichletova úloha pro lineární ODR 2. řádu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B,$$

- Přesné řešení
$$y(x)$$
- Ekvidistantní dělení
$$x_i = a + i\,h,$$
- Označíme
$$q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$
- **Aproximace řešení**
$$Y^i \approx y(x_i)$$
- Náhrada v uzlech sítě
$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$
$$f|_{x_i} = f_i$$
- Jak nahradit derivace?

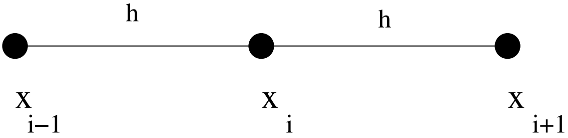
Náhrada derivace pomocí diferencí



- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

Náhrada derivace pomocí diferencí



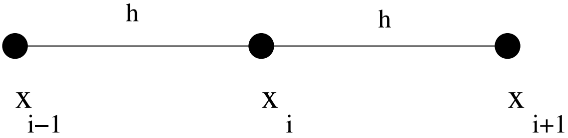
- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

- **1. centrální diference**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2),$$

Náhrada derivace pomocí diferencí



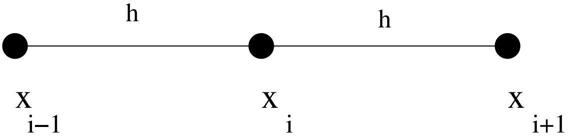
- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

- 2. centrální diference

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Náhrada derivace pomocí diferencí



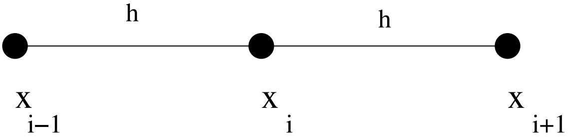
- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

- *Ale také (využijeme později)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + O(h),$$

Náhrada derivace pomocí diferencí



- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + O(h^4)$$

- **1. centrální diference**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2),$$

- 2. centrální diference

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2).$$

- *Ale také (využijeme později)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + O(h),$$

Dirichletova úloha pro ODR v samoadjungovaného tvaru

Formulace úlohy

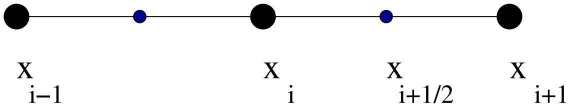
$$-(py')' + qy = f, \qquad\qquad y(a) = A,\ y(b) = B,$$

- existence a jednoznačnost řešení - viz přednáška 7
- nyní hledáme přibližné řešení

Náhrada samoadjungovaného tvaru

Dirichletova úloha pro lineární ODR 2. řádu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B,$$



- Náhrady v uzlu x_i

$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i, \quad f|_{x_i} = f_i$$

- **Užijeme 1. centrální diference** s krokem $h/2$ pro $z = py'$

$$z'(x_i) \approx \frac{z(x_{i+\frac{1}{2}}) - z(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

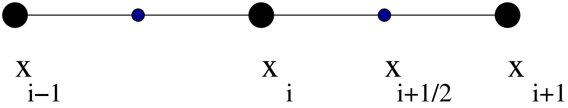
- dále

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^i - Y^{i-1}}{h}$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru

Dirichletova úloha pro lineární ODR 2. řádu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A, \; y(b) = B,$$



- **1. centrální diference** s krokem $h/2$

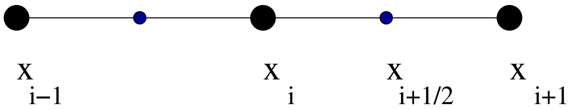
$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^{i}}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i} - Y^{i-1}}{h}$$

- tedy dostaneme

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) Y^{i} + p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1}}{h^2}$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru



Dirichletova úloha pro lineární ODR 2. řádu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{1}$$

- Pro $i = 1, \ldots, n-1$ nahradíme (**??**) v uzlu x_i

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

- kde $Y^0 = y(a) = A,\ Y^n = y(b) = B$
- Jaké chyby jsme se dopustili?

Náhrada samoadjungovaného tvaru - řád přesnosti

- Pro p, y dostatečně hladké platí

$$(py')'|_{x_i} = \frac{p_{i-\frac{1}{2}}y(x_{i-1}) - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}})y(x_i) + p_{i+\frac{1}{2}}y(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2)$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru - řád přesnosti

- Pro p, y dostatečně hladké platí

$$(py')'|_{x_i} = \frac{p_{i-\frac{1}{2}}y(x_{i-1}) - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}})y(x_i) + p_{i+\frac{1}{2}}y(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2)$$

- Dk. Užijeme

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru - řád přesnosti

- Pro p, y dostatečně hladké platí

$$(py')'|_{x_i} = \frac{p_{i-\frac{1}{2}}y(x_{i-1}) - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}})y(x_i) + p_{i+\frac{1}{2}}y(x_{i+1})}{h^2} + O(h^2)$$

- Dk. Užijeme

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

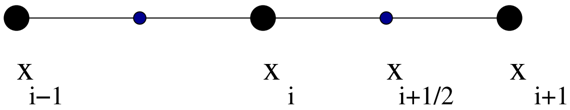
$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(x_i)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

- a dále

$$p_{i+1/2} = p_i + p'(x_i)\frac{h}{2} + p''(x_i)\frac{h^2}{8} + p'''(x_i)\frac{h^3}{48} + O(h^4)$$

$$p_{i-1/2} = p_i - p'(x_i)\frac{h}{2} + p''(x_i)\frac{h^2}{8} - p'''(x_i)\frac{h^3}{48} + O(h^4)$$

Náhrada samoadjungovaného tvaru



Dirichletova úloha pro lineární ODR 2. řádu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{2}$$

- Pro $i = 1, \ldots, n-1$ nahradíme (**??**) v uzlu x_i

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

- kde $Y^0 = y(a) = A,\ Y^n = y(b) = B$
- Dostáváme soustavu $n-1$ lineárních rovnic o $n-1$ neznámých.

Náhrada samoadjungovaného tvaru

Aproximovali jsme Dirichletovu úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \qquad (3)$$

soustavou rovnic pro $i = 1, \dots, n-1$

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

kde $Y^0 = A$, $Y^n = B$.

Vlastnosti soustavy rovnic:

- Matice soustavy je symetrická, třídiagonální.
- Matice soustavy je diagonálně dominantní ($p > 0, q \geq 0$).
- Je-li $q > 0$ pak matice soustavy je ODD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní ($p > 0, q \geq 0$).

Náhrada samoadjungovaného tvaru

Aproximovali jsme Dirichletovu úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \qquad (3)$$

soustavou rovnic pro $i = 1, \ldots, n-1$

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

kde $Y^0 = A$, $Y^n = B$.

Vlastnosti soustavy rovnic:

- Matice soustavy je symetrická, třídiagonální.
- Matice soustavy je diagonálně dominantní ($p > 0, q \geq 0$).
- Je-li $q > 0$ pak matice soustavy je ODD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní ($p > 0, q \geq 0$).
- *Existuje právě jedno řešení.*

Náhrada samoadjungovaného tvaru

Aproximovali jsme Dirichletovu úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{3}$$

soustavou rovnic pro $i = 1, \dots, n-1$

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

kde $Y^0 = A$, $Y^n = B$.

Vlastnosti soustavy rovnic:

- Matice soustavy je symetrická, třídiagonální.
- Matice soustavy je diagonálně dominantní ($p > 0, q \geq 0$).
- Je-li $q > 0$ pak matice soustavy je ODD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní ($p > 0, q \geq 0$).
- *Existuje právě jedno řešení.*
- **Jak toto řešení souvisí s přesným řešením?**

Konvergence metody a odhad chyby

Řešení a numerické řešení, chyba

Víme: Přesné řešení Dirichletovy úlohy $y(x)$ splňuje

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{4}$$

a hodnoty v uzlech sítě $\vec{y}$ soustavu

$$\mathbb{A}\vec{y} = F + O(h^2)$$

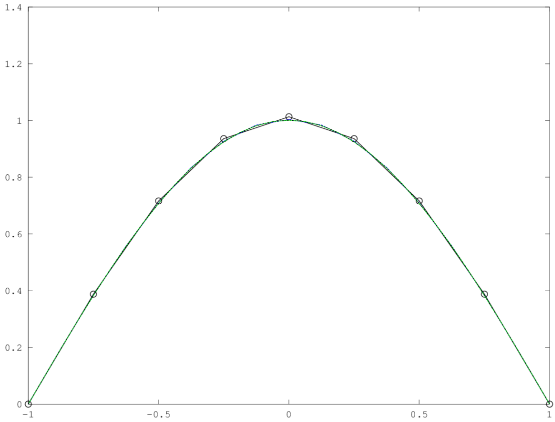
Přibližné řešení splňuje

$$\mathbb{A}Y = F$$

Lze něco říct o chybě $e = \vec{y} - Y$?

Numerická řešení, konvergence

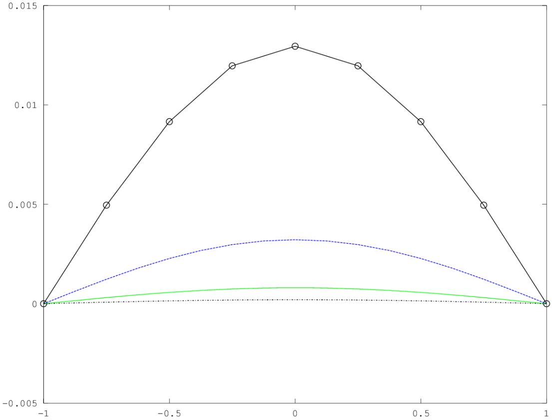
$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení, konvergence

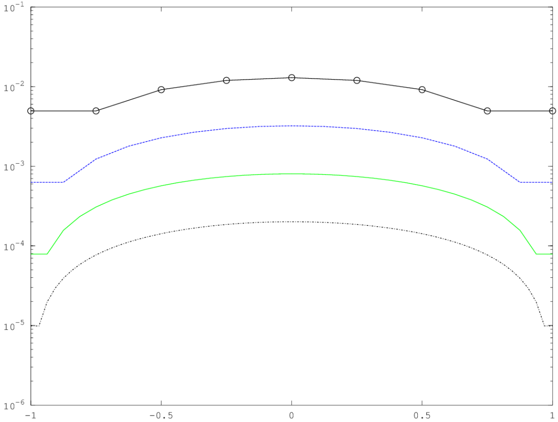
$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$



Chyba numerického řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení, konvergence

$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

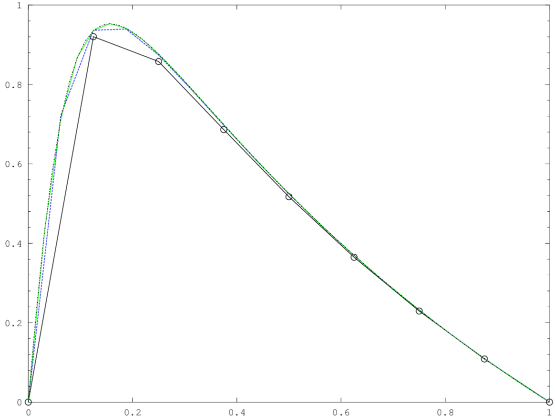


Chyba numerického řešení(log), krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení

Konvergence závisí na úloze

$$-(x^2y')' = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Stabilita, řád chyby, konvergence a její řád.

Vlastnosti soustavy rovnic

Aproxinujeme Dirichletovu úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad\qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{5}$$

soustavou rovnic

$$\mathbb{A}Y = F$$

Navíc

$$\mathbb{A}y = F + O(h^2)$$

Lze něco říct o chybě $e = \vec{y} - Y$? Ano, pokud řešení a data jsou hladké funkce:

$$e = O(h^2)$$

Příklady.

Metoda sítí pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru

27. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (c - x)y + x^2 = 0 \qquad y(2) = -1, y(4) = 3$$

a) Danou rovnici převeďte na samoadjungovaný tvar

b) Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathcal{R}$, pro něž jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy

c) Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.2$ pro $c = 1$

28. Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{4}{x^2 - 4}y = 1 \qquad y(3) = 0, y(5) = -1$$

a) Ověřte, že úloha má právě jedno řešení

b) Odvod'te soustavu sít'ových rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.5$

29. Je dána rovnice

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2 + x}y = \frac{1}{x - 3}$$

a) Určete intervaly maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici

b) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro danou rovnici s okrajovými podmínkami $y(-5) = -2, y(-3) = 0$

c) Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.4$

Přednáška č. 9

- Numerické řešení lineárních parciálních diferenciálních rovnic 2.řádu dvou nezávisle proměnných metodou sítí.
- Klasifikace rovnic.
- Formulace základních úloh pro rovnice matematické fyziky: pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici, pro rovnici vedení tepla a pro vlnovou rovnici.

Parciální diferenciální rovnice

- Co jsou parciální diferenciální rovnice (PDR)?
- Lineární vs. nelineární rovnice.
- Řešení PDR.

Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic(PDR)

- Lineární PDR 2. řádu

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

- PDR je: *eliptická*, *parabolická* nebo *hyperbolická*.
- Závisí na $r = r(x, y)$

$$r = b^2 - 4ac$$

- PDR nazýváme
  - *eliptickou* pro $r < 0$,
  - *parabolickou* pro $r = 0$,
  - nebo *hyperbolickou* pro $r > 0$.
- Př. Určete typ PDR

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic(PDR)

Příklady PDR

- Poissonova rovnice ($\triangle$ - Laplace operátor)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

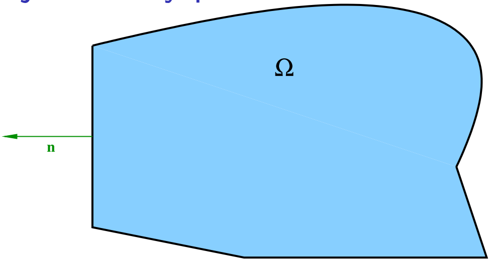
- Rovnice vedení tepla ($p > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

Formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici



- Uvažujme oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s Lipschitzovsky spojitou hranicí.
- Hledáme $u(x,y)$ takové, že

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\triangle u} = f(x,y), \qquad \text{v } \Omega$$

- a splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku

$$u(x,y) = \varphi(x,y) \qquad \text{pro } [x,y] \in \partial\Omega$$

Pozn. Okrajové podmínky (např. Neumannova).

Poissonova rovnice

Existence a jednoznačnost řešení

- Hledáme $u(x, y)$ takové, že

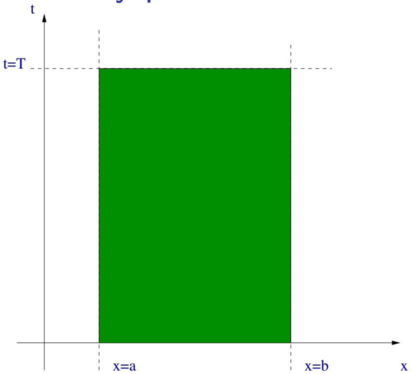
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{v } \Omega$$

- a splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \qquad \text{pro } [x, y] \in \partial\Omega$$

- **Platí:** Je-li Ω konvexní oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí, a je-li φ spojitá a $f \equiv 0$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
- **a dále:** Je-li Ω oblast s hladkou hranicí (C^2), a je-li $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Formulace smíšené úlohy pro rovnici vedení tepla



- Hledáme $u = u(x,t)$, $[x,t] \in \Omega = (a,b) \times (0,T)$, takovou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

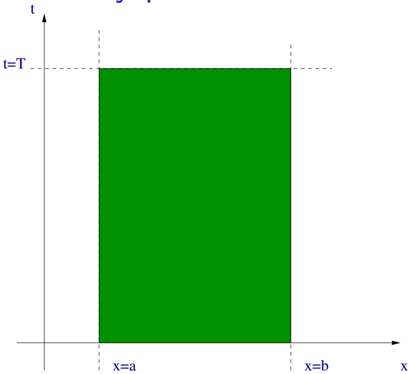
- **počáteční a okrajové podmínky**

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t).$$

Existence řešení smíšené úlohy pro rovnici vedení tepla

- **Úloha**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- **počáteční podmínka**
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \langle a, b\rangle,$$
- **okrajové podmínky**
$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$
- Kdy existuje řešení? Jednoznačnost řešení?
- Nutné p.:**Podmínky souhlasu**.

Formulace smíšené úlohy pro vlnovou rovnici



- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínky a okrajové podmínky**

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t$$

Formulace smíšené úlohy pro vlnovou rovnici

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínky**

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

- **okrajové podmínky**

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

- Kdy existuje řešení? Jednoznačnost řešení?
- Nutné p.:**Podmínky souhlasu**.

Příklady.

30. Ověřte splnění podmínek souhlasu pro úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;1);\ t > 0\}$$

$$u(x,0) = x^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0;1\rangle$$
$$u(0,t) = \operatorname{arctg}(t), \qquad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

31. Ověřte splnění podmínek souhlasu pro úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;2);\ t > 0\}$$

a podmínky.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(2-x) \quad \text{pro } x \in \langle 0;2\rangle \\ u(0,t) &= 30t \quad \text{pro } t \geq 0 \\ u(2,t) &= 0 \quad \text{pro } t \geq 0 \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu.

32. Ověřte splnění podmínek souhlasu **(pro polohu a rychlost)** pro úlohu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\sin t$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle -1;1\rangle \\ u(-1,t) &= 1, \quad u(1,t) = \cos t \qquad \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{aligned}$$

Princip metody sítí

PDR - jak nahradit parciální derivace?

- Poissonova rovnice ($\triangle$ - Laplace operátor)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

- Rovnice vedení tepla ($p > 0$)

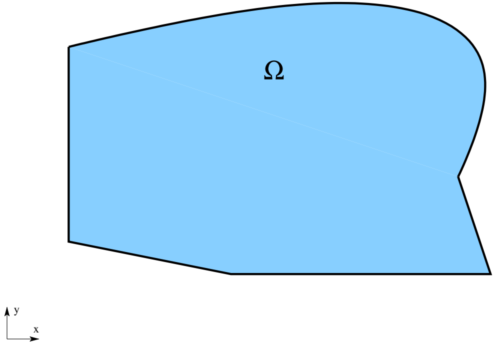
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

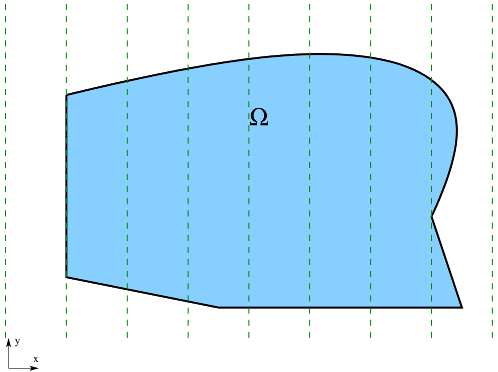
Jak nahradit první nebo druhou **parciální derivaci**?

Principmetody sítí



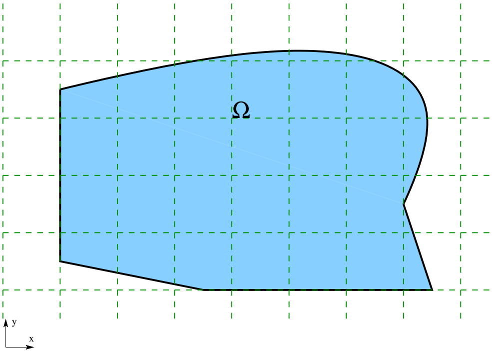
- Hledáme aproximaci funkce $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Princip metody sítí



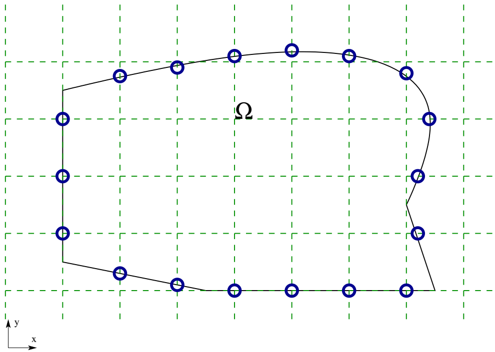
- Hledáme aproximaci funkce $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- zvolíme krok h_1, označíme $x_i = x_0 + ih_1$, síťové čáry $x = x_i$

Princip metody sítí



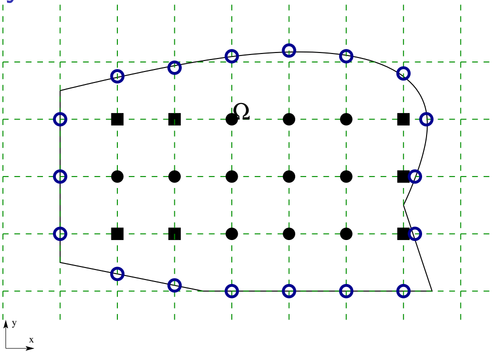
- Hledáme aproximaci funkce $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- zvolíme krok h_1, označíme $x_i = x_0 + ih_1$, síťové čáry $x = x_i$
- zvolíme krok h_2, označíme $y_j = y_0 + jh_2$, síťové čáry $y = y_j$

Princip metody sítí



- Hledáme aproximaci funkce $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- zvolíme krok $h_x = h$, označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$
- zvolíme krok $h_y = h$, označíme $y_j = y_0 + jh$, síťové čáry $y = y_j$
- společné body síťových čar s $\partial\Omega$ - hraniční uzly

Princip metody sítí



- Hledáme aproximaci funkce $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.
- zvolíme krok h_1, označíme $x_i = x_0 + ih_1$, síťové čáry $x = x_i$
- zvolíme krok h_2, označíme $y_j = y_0 + jh_2$, síťové čáry $y = y_j$
- společné body síťových čar s $\partial\Omega$ - hraniční uzly
- průsečíky $x = x_i$ a $y = y_j$ ležící uvnitř $\overline{\Omega}$

$$P_{i,j} = [x_i, y_j]$$

- Aproximujeme řešení $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$

Diferenční náhrady prvé a druhé derivace funkce

- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

- 1. centrální diference

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + O(h^2),$$

Diferenční náhrady

Náhrady 2. derivace funkce, řád aproximace.

- Užitím Taylorova polynomu

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\,f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}\,f'''(x_0) + O(h^4)$$

- Sečteme obě rovnice a vyjádříme $f''(x_0)$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Diferenční náhrady

Náhrady parciálních derivací

- Jak nahradit 1. nebo 2. parciální derivaci v $P_{i,j}$?
- Parciální derivace je derivace funkce jedné proměnné (ostatní jsou konstanty).
- Tedy

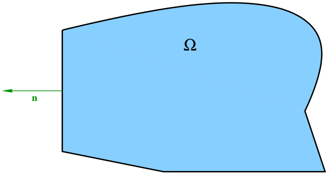
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_{i,j}) = \frac{d\varphi}{dx}(x_i), \qquad \text{kde } \varphi(x) = u(x, y_j).$$

Přednáška č. 10

Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

- Diferenční náhrady prvé a druhé derivace funkce, řád aproximace.
- Princip metody sítí a její aplikace pro řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici.

Formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici



Hledáme $u(x, y)$ tak, že

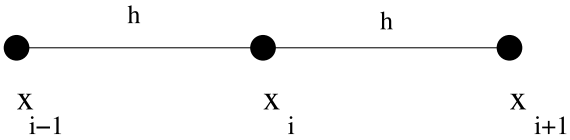
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad \text{v } \Omega$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \qquad \text{pro } [x, y] \in \partial\Omega$$

- Užijeme metodu sítí.
- Jak nahradit parciální derivace ?

Diferenční náhrady

Náhrada 2. derivace funkce jedné proměnné



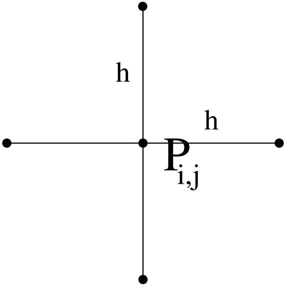
- Užitím Taylorova polynomu

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} + O(h^2),$$

- užitím přibližných hodnot

$$u''(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}.$$

Diferenční náhrady parciální derivace



- chceme nahradit

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

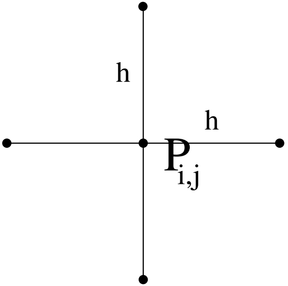
- 2. centrální diference ve směru x, chyba $O(h^2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2},$$

- 2. centrální diference ve směru y, chyba $O(h^2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2},$$

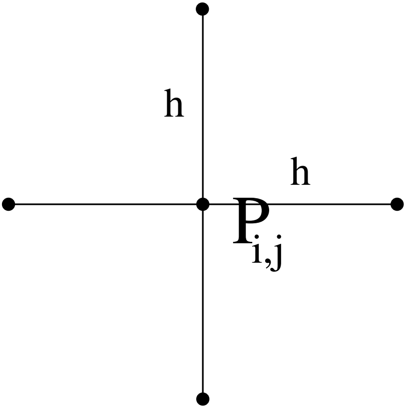
Diferenční náhrady 2. parciální derivace



- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2},$$
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2},$$
- Náhrada rovnice $\triangle u = f$ v bodě $P_{i,j}$

$$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = -h^2 f_{i,j}$$

Diferenční náhrady 2. parciální derivace

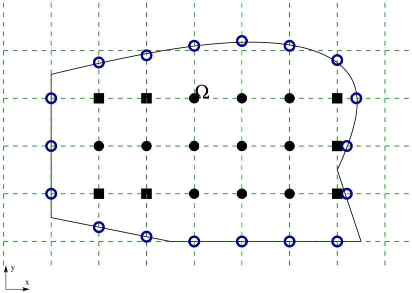


- Náhrada rovnice $\triangle u = f$ v bodě $P_{i,j}$

$$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = -h^2 f_{i,j}$$

- jen pro $P_{i,j}$, který „má všechny sousedy“ (viz obr.),
- Takový uzel nazýváme **regulární**.

Princip metody sítí

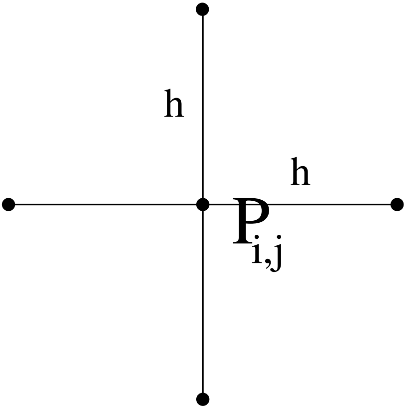


- označíme $x_i = x_0 + ih_1$, $y_j = y_0 + jh_2$, hraniční uzly
- průsečíky $x = x_i$ a $y = y_j$ ležící uvnitř Ω

$$P_{i,j} = [x_i, y_j]$$

- Aproximujeme řešení $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$
- Označíme **regulární** a **neregulární** uzly.

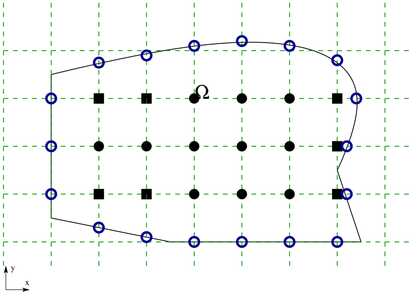
Náhrada rovnice v regulárním uzlu



- Rovnici $\triangle u = f$ nahradíme v regulárním uzlu $P_{i,j}$ rovnicí

$$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = -h^2 f_{i,j}$$

Náhrada v hraničním uzlu



- v **regulárních uzlech** $P_{i,j}$ - nahradíme rovnici

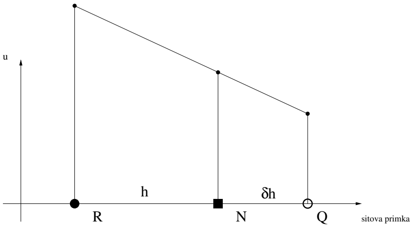
$$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = -h^2 f_{i,j}$$

- v **hraničních uzlech** Q - užijeme okrajové podmínky

$$U_Q = \varphi(Q)$$

- v **neregulárních uzlech** P_N - chceme zachovat řád aproximace!

Náhrada v neregulárním uzlu



- Hodnotu v neregulárním uzlu - lineární interpolace

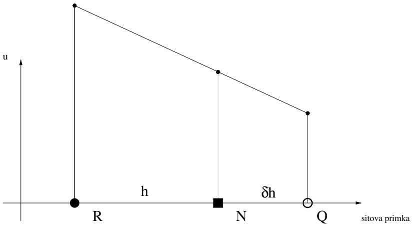
$$\frac{U_R - U_N}{h} = \frac{U_N - U_Q}{\delta h}$$

- tedy

$$(1 + \delta)U_N - \delta U_R = U_Q$$

- Pro hladké řešení je tato náhrada 2. řádu přesnosti, tj. chyba $O(h^2)$

Odvození: Náhrada v neregulárním uzlu



- **Ukažte, že pro u dostatečně hladké je náhrada**

$$(1+\delta)U_N - \delta U_R = U_Q$$

druhého řádu přesnosti.

- Dle **Taylorova** rozvoje v P_N:

$$u(x+\delta h) = u(x) + \delta h u'(x) + O(h^2)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + O(h^2)$$

Vlastnosti soustavy rovnic. Řád aproximace

- Výsledná soustava rovnic je lineární a DD.
- Pozitivně definitní.
- Symetrická ?
- Matice je tzv. **řídká**.
- Chyba aproximace $O(h^2)$.
- Co platí pro chybu řešení?

$$e = u - U$$

$$AU = F$$

$$Au = F + O(h^2)$$

Poissonova rovnice

Příklad

33. Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = 4$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.8]$, $[1.4; 1.8]$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x^2$ na hranici $\Gamma = \partial\Omega$

b) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = 0.6$

c) Sestavte sít'ové rovnice v uzlech tak, aby metoda byla 2.řádu přesnosti

34. a) Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = x(y + 1)$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[1.8; 0]$, $[0; 1.5]$ a $[1.5; 1.5]$. s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x + y$ na hraniciΓ.

(a) Volte $h = 0.5$, nakreslete obrázek oblasti, zobrazte všechny sít'ové čáry, sít'ové uzly uvnitř oblasti, regulární neregulární a hraniční uzly, číslování uzlů.

(b) Sestavte sít'ové rovnice, v neregulárních uzlech užijte lineární interpolace.

Přednáška č. 11

Rovnice vedení tepla

- Metoda sítí pro rovnici vedení tepla.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Rovnice vedení tepla

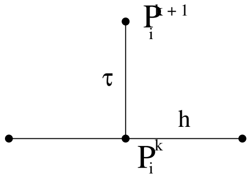
- **Úloha**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- **počáteční podmínka**
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \langle a, b\rangle,$$
- **okrajové podmínky**
$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

Metoda sítí a aproximace řešení

- **Rovnice**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Síť: Volíme krok $h = (b-a)/n$ a krok $\tau > 0$.
$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$
- Síťové uzly P_i^k a aproximace řešení U_i^k
$$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u(x_i, t_k).$$
- Postup řešení:
$$\{\mathbf{U}_i^0\} \to \{U_i^1\} \to \{U_i^2\} \to \{U_i^3\} \dots$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

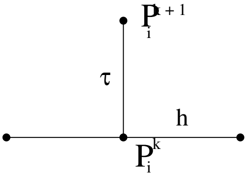
- Náhrada v uzlu P_i^k, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^k, chyba $O(h^2+\tau)$

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k,$$

- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- **Stabilita:**

$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k ,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.001	0	21	24	29	36	25
0.002	0	-159	44	49	-144	25
0.003	0	3461	-1936	...	...4	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

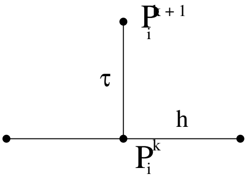
- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.00005$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 0.5$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.0005	0	2	5	10	17	25
0.0010	0	2.5	6	11	17.5	25
0.0015	0	3	6.75	12.25	18	25
0.0020	0	3.375	7.625	12.375	18.625	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Chyba aproximace:

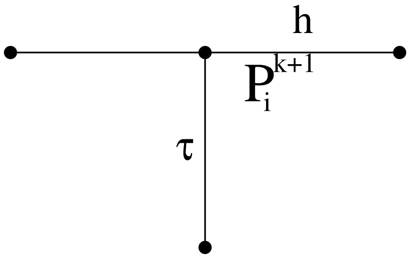
$$O(h^2 + \tau),$$

- Stabilita

$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rovnice vedení tepla

Implicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

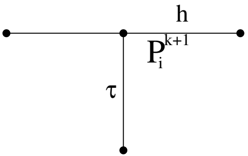
- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^{k+1}) \approx \frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^{k+1}) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

Rovnice vedení tepla

Implicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, chyba $O(h^2 + \tau)$

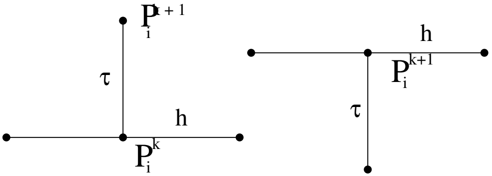
$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i^{k+1},$$

- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$, dostáváme

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

Rovnice vedení tepla

Srovnání explicitní a implicitní schéma



- **Explicitní schéma:**

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

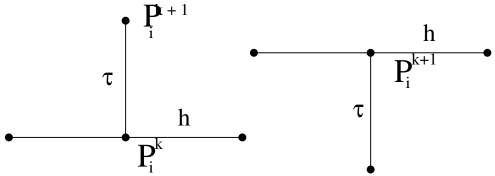
- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$
- **Implicitní schéma:**

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\sigma) U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: Vždy.

Rovnice vedení tepla

Srovnání explicitní a implicitní schéma



- **Explicitní schéma:**

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$
- **Implicitní schéma:**

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma) U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

- Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau)$,
- Stabilita: Vždy.
- Lze **Crank-Nicholson**: Chyba aproximace: $O(h^2 + \tau^2)$, stabilita vždy.

Rovnice vedení tepla

Příklad

35.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;1);\ t > 0\}$$

$$u(x,0) = x^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0;1\rangle$$

$$u(0,t) = \mathrm{arctg}(t), \qquad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

b) Ověřte splnění podmínek souhlasu

c) Určete τ a minimální krok h tak, aby při jejím řešení stabilní explicitní metodou ležel bod $P = [0.25; 0.1]$ v prvé časové vrstvě

d) Pro hodnoty τ a h z bodu (b) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

e) Při $h = \tau = 0.25$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu užitím implicitní formule

36. Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;2);\ t > 0\}$$

b) Při zadaných podmínkách

$$u(x,0) = x(2-x), \qquad u(0,t) = 30t, \qquad u(2,t) = 0, \qquad \text{pro } x \in \langle 0;2\rangle,\ t \geq 0,$$

sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1$ aby pro daný krok v ose x bylo užité schema stabilní

Přednáška č. 12

- Metoda sítí pro vlnovou rovnici.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Formulace smíšené úlohy pro vlnovou rovnici

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínky**

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

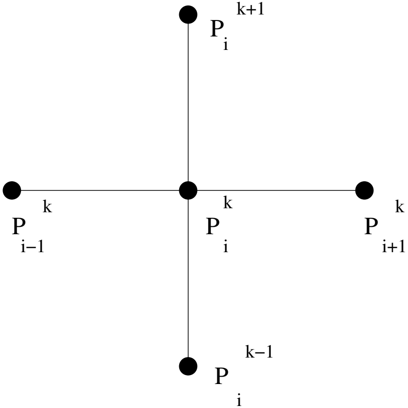
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

- **okrajové podmínky**

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

- Jsou splněny **podmínky souhlasu**.

Explicitní metoda



- **Aproximace derivací**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

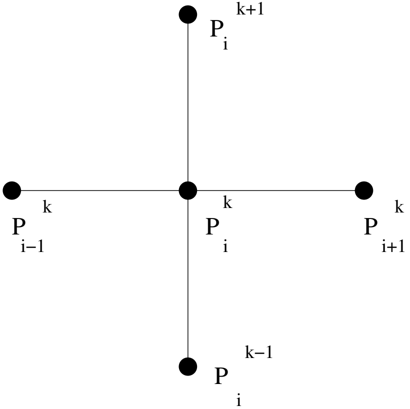
- Síť: Volíme krok $h = (b-a)/n$ a krok $\tau > 0$.

$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$

- Síťové uzly P^k a aproximace řešení U^k

Explicitní schéma

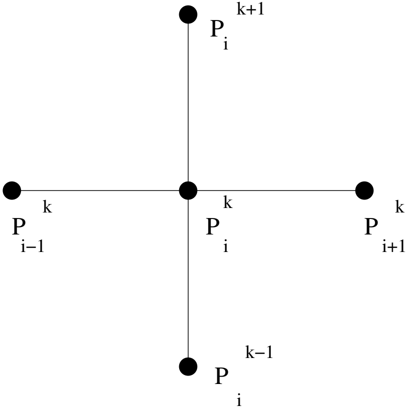
Náhrada v regulárním uzlu



- **Rovnice**:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Náhrada v uzlu P_i^k:
$$\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\ldots} = c^2 \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{\ldots} + f_i^k$$

Explicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu



- Náhrada v uzlu P_i^k, **explicitní schéma**

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i+1}^k + 2(1-\sigma^2) U_i^k + \sigma^2 U_{i-1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k$$

- Stabilita:

$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1.$$

Náhrada na 1. časové vrstvě

Náhrada s chybou $O(\tau^2)$

- Náhrada s chybou $O(\tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \tau) - u(x_i, 0)}{\tau} + O(\tau) \approx \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau}$$

- nebo-li

$$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + O(\tau^2)$$

Vlnová rovnice, explicitní schéma

- Lokální chyba aproximace - 2. centrální diference (viz Přednáška 7)
$$O(h^2 + \tau^2)$$
- Důležitá **stabilita**: $\sigma \leq 1$
- Náhrada na 1. časové vrstvě: chyba $O(\tau)$.

I. **Ovlivní chyba na 1. časové vrstvě chybu řešení?** Pokud ano, mohu to zlepšit?

II. **Lze užít implicitního schématu**, tj. aby byla zaručena stabilita pro libovolné $\sigma \geq 0$?

Náhrada na 1. časové vrstvě

Náhrada s chybou $O(\tau^2)$

I. Náhrada s chybou $O(\tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) \approx \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau}$$

nebo-li

$$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + O(\tau^2)$$

II. Možnost: náhrada s chybou $O(\tau^2)$:

$$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\tau^3)$$

Za výraz $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0)$ dosadíme přímo vlnovou rovnici.

Implicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu

- **Rovnice**:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Náhrada v uzlu P_i^k:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2}$$
- Dosadíme do rovnice, násobíme τ^2,
- označíme
$$\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$$
- vyjádříme soustavu pro U_i^{k+1}

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k-1} - (1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$$

Vlnová rovnice

Příklad

37. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) &= 1\ , \quad u(1,t) = \cos t \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$

c) Odvoďte síťové rovnice pro první časovou vrstvu při náhradě $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ s chybou $\mathcal{O}(\tau)$

d) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$. Užijte výsledky z bodů (b) a (c).

38.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-1)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1 - x)^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ u(0,t) &= \sin t\ , \quad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu.

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

Opakování

- Příklady.

Písemka (1., 2.)

1. Je dána tabulka hodnot

x_i	-2	-1	-1	0	0	0	1	1	2
y_i	0.8	-0.58	-0.62	-1.2	-0.5	-1.3	0	-0.8	1.2

   a) Zapište podmínku, kterou má splňovat polynom nejvýše 2. stupně, který aproximuje tabulku hodnot x_i y_i metodou nejmenších čtverců. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro tento případ. **[8b]**
   b) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot a pro aproximaci polynomem $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně. Proveďte LU rozklad matice soustavy a užitím LU rozkladu vypočtěte přesné řešení soustavy. **[10b]**
   c) Určete polynom $p_2^*(x)$ nejvýše 2. stupně, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců. **[7b]**

2. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny postačujícípodmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy **[5b]**
   b) Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem $h = 1$ určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 2$. **[10b]**
   c) Nechť y_i označuje hodnotu numerického řešení v bodě x_i získaného Collatzovou metodou a y_i^* hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu ε_i. Zapište jaká je závislost ε_i na kroku h a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě x při změně kroku z h na $h/4$ u Collatzovy metody. **[10b]**

Písemka (3., 4.)

3. Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - 4y = -\frac{2}{x}, \qquad y(1) = 1, y(5) = 0$$

   a) Danou rovnici převedte na samoadjungovaný tvar. Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy. Ověřte zda jsou splněny. **[8b]**
   b) Ukažte, že výraz $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$ je aproximací $y'(x)$ pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$. Užitím tohoto vztahu odvoďte tvar síťových rovnic pro diskretizaci úlohy v samoadjungovaném tvaru metodou sítí s krokem h. **[8b]**
   c) Volte $h = 1$ a sestavte sít'ové rovnice pro Dirichletovu úlohu v samoadjungovaném tvaru získanou v a). Je pro tuto soustavu rovnic Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní? Zdůvodněte. **[9b]**

4. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2x}{t+1},$$

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = ax + b & & \text{pro } x \in < 0, 4 >, \\ u(0,t) = 2 + t & u(4,t) = -2 & \text{pro } t \in \langle 0, 10 \rangle \end{array}$$

   a) Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu a odvoďte síťovou rovnici v regulárním uzlu $(k+1)$-ní časové vrstvy při řešení dané úlohy implicitní metodou. Zapište podmínku stability pro implicitní metodu. **[10b]**
   b) Volte krok h a τ maximální tak, aby bod $A = [1; \frac{1}{2}]$ byl uzlem sítě implicitní metoda byla stabilní. Sestavte rovnice implicitního schematu na první časové vrstvě. **[9b]**
   c) Pro získanou soustavu rovnic z b) proveďte jeden krok Jacobiho iterační metody, počáteční iteraci volte jako nulový vektor (tj. $X^{(0)} = \vec{0}$). **[6b]**