

NMA/PŘÍKLADY PRO ZKOUŠKOVOU PÍSEMKU úroveň B

- 2 příklady z 1.-3., 2 příklady z I.-III.

1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

- Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Je daná matice A symetrická a pozitivně definitní?
 - Určete $X^{(1)}$ Gauss-Seidelovou iterační metodou při volbě $X^{(0)} = B$.
 - Spočítejte řádkovou normu $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m$.
2. a) Graficky znázorněte přibližnou polohu kořenů soustavy

$$x^2 y = 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 9$$

- Volte $X^{(0)} = (2; 0)^T$ a pomocí Newtonovy metody stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy
3. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = -y' + 2y - x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5.$$

- Učete interval maximálního řešení dané úlohy.
- Danou úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řády převedte na Cauchyovu úlohu pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu.
- Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte aproximaci $y(1)$ a $y'(1)$.

I. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3, \quad u(x, 0) = 1, \quad u(-1, t) = \frac{1}{1+t}, \quad u(1, t) = 1,$$

- Ověřte podmínky souhlasu.
- Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ je splněna.
- Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.7, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

II. Je dána okrajová úloha $\Delta u = x+y$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0, 0]$, $[1.5, 0]$, $[0.3, 1.5]$, $[1.5, 1.5]$ na hranici $u(x, y) = xy$.

- Nakreslete oblast, síťové čáry a vyznačte regulární a neregulární uzly.
- Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$ které vzniknou při řešení úlohy metodou sítě s krokem $h=0.5$.

III. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3, \quad u(x, 0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1, t) = \frac{1}{t+2}, \quad u(1, t) = \frac{3}{t+2},$$

- Volte krok h a τ maximální tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A[0.7, 0.02]$ byl uzlem sítě. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A explicitním schématem.
- Bude splněna podmínka stability pro $h = 10^{-3}$ a $\tau = 10^{-4}$? Zdůvodněte.