NMA/PŘÍKLADY PRO ZKOUŠKOVOU PÍSEMKU úroveň A

- 2 příklady z 1.-3., 2 příklady z I.-III.

1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & p+1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Zapište jaké podmínky musí splňovat prvky matice C typu 3×3, aby byla ostře diagonálně dominantní (sloupce i řádky).

b) Určete pro které parametry $p \in R$ je daná matice A ostře diagonálně dominantní. Určete pro které parametry $p \in R$ je daná matice A symetrická a pozitivně definitní.

c) Zdůvodněte, zda pro $p = -2$ a pro danou matici A je Gauss-Seidelova iterační metoda konvergentní.

d) Pro $p = -2$ určete $X^{(1)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

2. a) Jsou dány rovnice $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ a počáteční přiblížení kořenů těchto rovnic $X^0 = [x_0, y_0]$. Zapište rovnice, z kterých lze odvodit vzorec pro výpočet aproximace X^1 Newtonovu iterační metodou.

b) Odvoďte vzorce pro Newtonovu iterační metodu.

c) Volte $X^{(0)} = (2; 0)^T$ a pomocí Newtonovy metody stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy

$$x^2 y = 4, \qquad x^2 + y^2 = 9$$

3. Je dána Cauchyova úloha

$$2y'' + \frac{4}{10}y' + 2y = \frac{1}{1+x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 5.$$

a) Učete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Danou úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řády převeďte na Cauchyovu úlohu pro soustavu obyčejných diferenciální rovnic 1.řádu.

c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte aproximaci $y(1)$ a $y'(1)$.

I. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3, \qquad u(x,0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1,t) = \frac{1}{t+2}, \quad u(1,t) = \frac{3}{t+2},$$

a) Užijte Taylorova rozvoje funkce y odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot $y(x+h)$, $y(x)$. Zapište chybu, které se dopustíte.

b) Odvoďte explicitní schéma pro řešení dané rovnice, užijte výsledek a).

c) Řešte metodou sítí užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ maximální tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A[0.7, 0.01]$ byl uzlem sítě. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

II. Je dána okrajová úloha $\triangle u = 4x^2 y$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$, $[0,1.5]$, $[1.5,1.5]$ na hranici $u(x,y) = 2x + 4y$.

a) Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu.

b) Odvoďte náhradu rovnice v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

c) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$ které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5.

III. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3, \qquad u(x,0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1,t) = \frac{1}{t+2}, \quad u(1,t) = \frac{3}{t+2},$$

a) Užijte Taylorova rozvoje pro odvození náhrady $y''(x)$ pomocí hodnot funkce y v bodech $x+h$, x, $x-h$. Zapište jaký předpoklad na funkci y byl použit.

b) Odvoďte explicitní schéma pro náhradu dané rovnice v regulárním uzlu.

c) Volte krok h a τ maximální tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A[0.7, 0.02]$ byl uzlem sítě. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A explicitním schématem.

d) Lze očekávat, že dostaneme přesnější hodnoty při použití kroku $h = 10^{-3}$ a $\tau = 10^{-3}$? Zdůvodněte.

e) Zdůvodněte, proč volba $h = 0.3$ a $\tau = 0.02$ není přípustná.