NMA - 7. konzultace.

Parabolické rovnice. Rovnice vedení tepla.

- Rovnice:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad \sigma = \frac{p\tau}{h^2}$$

- Explicitní schéma (podmínka stability: $\sigma \leq 1/2$)

$$U_i^{k+1} = (1-2\sigma)U_i^k + \sigma(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) + \tau f_i^k$$

- Implicitní schéma (podmínka stability: $\sigma \geq 0$):

$$-\sigma U_{i+1}^{k+1} + (1+2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_{i-1}^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1}$$

42.a) Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x;t] : x \in (0;2);\ t > 0\}$$

b) Při zadaných podmínkách

$$u(x,0) = x(2-x), \qquad u(0,t) = 30t, \qquad u(2,t) = 0, \qquad \text{pro } x \in \langle 0;2\rangle,\ t \geq 0,$$

sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1$ aby pro daný krok v ose x bylo užité schema stabilní

Hyperbolické rovnice. Vlnová rovnice.

- Rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad \sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$$

- Explicitní schéma (podmínka stability: $\sigma \leq 1$)

$$U_i^{k+1} = 2(1-\sigma^2)U_i^k + \sigma^2(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k$$

- Implicitní schéma (podmínka stability: $\sigma \geq 0$):

$$(1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{\sigma^2}{2}(U_{i-1}^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}) = -(1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{\sigma^2}{2}(U_{i-1}^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}) + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$$

- Náhrada na 1. časové vrstvě řádu $O(\tau)$:

$$u(x_i,\tau) = u(x_i,0) + \tau u_t(x_i,0) + \tau O(\tau)$$

- Náhrada na 1. časové vrstvě řádu $O(\tau^2)$:

$$u(x_i,\tau) = u(x_i,0) + \tau u_t(x_i,0) + \frac{1}{2}\tau^2 u_{tt}(x_i,0)\tau O(\tau^2)$$

kde z PDR dostaneme $u_{tt}(x_i,0) = c^2 u_{xx}(x_i,0) + f(x_i,0)$

43.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\sin t$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \qquad \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) &= 1\ , \quad u(1,t) = \cos t \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$

c) Odvoďte síťové rovnice pro první časovou vrstvu při náhradě $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ s chybou $\mathcal{O}(\tau)$

d) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$. Užijte výsledky z bodů (b) a (c).

44.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-1)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1-x)^2 \qquad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ u(0,t) &= \sin t\ , \quad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Ověřte splnění podmínek souhlasu.

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

45.a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1 - x^2\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{pro } x \in \langle 1; 2\rangle \\ u(1,t) &= 0\ , \quad u(2,t) = \frac{-3}{t^2+1} \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.25$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [1.5; 1]$ byl uzlem sítě

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A. Pro první časovou vrstvu užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

46.a) Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \text{v oblasti } \Omega = (a; b) \times (0; \infty)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in \langle a; b\rangle \\ u(a,t) &= \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t) \qquad \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{aligned}$$

Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě ($k \geq 1$) implicitní metodou.

b) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení první časové vrstvě s chybou $\mathcal{O}(\tau^2)$