NMA - 5. konzultace.

Řešení okrajové úlohy pro ODR

- ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru,

$$-\Big(p(x)y'\Big)' + q(x)y = f(x), \text{ pro } x \in (a,b),$$

- Dirichletovy okrajové podmínky: $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

32a) Nechť funkce $y(x)$ je dostatečně hladká na dostatečném okolí bodu x_0. Zapište Taylorův rozvoj v bodě x_0 funkce y (zapište členy až do 3. derivace včetně, chybu Taylorova polynomu zapište užitím symbolu $O(h)$).

$$y(x) = y(x_0) + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots$$

b) Užitím a) vyhodnoťe Taylorův rozvoj v bodě $x = x_0 + h$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots$$

c) Užitím a) vyhodnoťe Taylorův rozvoj v bodě $x = x_0 - h$

$$y(x_0 - h) = y(x_0) + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots$$

d) Užitím b) a c) zapište

$$y(x_0 + h) - y(x_0 - h) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots$$

e) Užitím b) a c) zapište

$$y(x_0 + h) + y(x_0 - h) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots$$

f) Označme $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorec d) pro aproximaci derivace funkce $z(x)$ v bodě x_0.

$$(py')' = \frac{1}{2xh/2}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

g) Užijte značení z f), tedy $z(x) = p(x)y'(x)$. Volte krok h jako $h/2$, užijte vzorce d) pro aproximaci $y'(x)$, a odvoďte vzorce pro náhradu

$$p(x_0 + h/2)y'(x_0 + h/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

$$p(x_0 - h/2)y'(x_0 - xh/2) = \frac{1}{h}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) + O(\qquad)$$

h) Označte $x_i = a + i\,h$ ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme (přibližné) hodnoty funkcí v bodech x_i jako $y_i = y(x_i)$, $p_{i\pm1/2} = p(x_i \pm h/2)$, $q_i = q(x_i)$ a $f_i = f(x_i)$. Kombinací vzorců z f) a g) odvoďte diferenční náhradu samoadjungované rovnice v bodě x_i.

33. Převeďte Dirichletovu okrajovou úlohu na samoadj. tvar, a ověřte předpoklady pro existenci a jednoznačnst řešení.

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}, \qquad y(-5) = -2, y(-3) = 0$$

Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.4$

34 a) Zapište postačující podmínky pro existenci řešení Dirichletovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru (t.j. $-(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$).

b) Dána Dirichletova úloha

$$y'' - 2y' + (x - \alpha)y = e^{2x}, \quad y(1) = 0, y(2) = 1.$$

Rovnici zapište v samoadjungovaném tvaru. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in R$, pro které jsou uvedené podmínky (viz a) splněny

(c) Zapište rovnice pro řešení dané úlohy pomocí metody sítí. Pro $h = 0.2$ a $\alpha = 5$ zapište 1. rovnici (tj. v bodě $x = 1.2$) ze soustavy rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí.

Klasifikace Parciálních Diferenciálních Rovnic (PDR) 2. řádu

- **Eliptická rovnice. Dirichletova úloha pro Laplacovu rovnici.**

$$\triangle u = f(x,y), \qquad \text{v } \Omega \subset R^2, \qquad u(x,y) = u_D(x,y), \quad \text{pro } [x,y] \in \partial\Omega.$$

- **Smíšená úloha pro parabolickou rovnici (rovnice vedení tepla).**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

Okrajové podmínky:

$$u(a,t) = \varphi_1(t), \qquad u(b,t) = \varphi_2(t), \qquad \text{pro } t \geq 0$$

Počáteční podmínka:

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \text{pro } x \in [a,b].$$

- **Smíšená úloha pro hyperbolickou rovnici (vlnová rovnice)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad \text{pro } x \in [a,b], t \geq 0$$

Okrajové podmínky: $\quad u(a,t) = \varphi_1(t), \qquad u(b,t) = \varphi_2(t), \qquad \text{pro } t \geq 0$

Počáteční podmínky: $\quad u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad \text{pro } x \in [a,b].$

35.a) Odvoďte diferenční schema pro řešení Poissonovy rovnice metodou sítí v regulárních uzlech

b) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$ aproximací $y''(x_i)$ 2.řádu přesnosti

36. a) Zapište maticově soustavu síťových rovnic, která vznikne při řešení rovnice $\Delta u = 0$ na čtyřúhelníku $[-1;0]$, $[1.5;0]$, $[0;1.5]$, $[-1;1.5]$ s krokem $h = 0.5$. Na hranici je $u(x,y) = y$

b) Ověřte, že danou soustavu lze řešit Jacobiho iterační metodou