

## NMA - 4. konzultace.

### Numerické řešení Cauchyovy úlohy.

- Numerická aproximace: v bodech  $x_n = x_0 + n h$ ,  $h$  - krok metody  $y(x_n) \approx Y^n$ ,

- **Eulerova metoda:**

$$Y^{n+1} = Y^n + h \underbrace{f(x_n, Y^n)}_{\mathbf{k}} \quad (1)$$

- **Collatzova metoda**

$$Y^{n+1} = Y^n + h \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_{pom}\right), \quad (2)$$

$$Y_{pom} = Y^n + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, Y^n),$$

25. Je dána Cauchyova úloha

$$y'(y-4) = x + \sqrt[3]{1-y} \quad y(3) = 2$$

- Zapište oblast  $\mathcal{G}$  v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy
- Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu  $y(3.2)$  s krokem  $h = 0.2$

27. Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2x - y_2^2 + y_1 + 1 \\ \sqrt{4 - y_1} - 2x \end{pmatrix} \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zapište oblast  $\mathcal{G}$  v níž jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.
- Užitím Collatzovy metody (1.modifikace Eulerovy metody) s krokem  $h = 1$  určete přibližně hodnotu řešení v bodě  $x = 2$ .
- Nechť  $y_i$  označuje hodnotu numerického řešení v bodě  $x_i$  získaného Collatzovou metodou a  $y_i^*$  hodnotu přesného řešení. Zapište pomocí těchto hodnot globální chybu  $\varepsilon_i$ . Zapište jaká je závislost  $\varepsilon_i$  na kroku  $h$  a určete jakého řádu je Collatzova metoda. Odhadněte, jak se změní globální chyba v bodě  $x$  při změně kroku z  $h$  na  $h/4$  u Collatzovy metody.

27. Je dána Cauchyova úloha

$$y''' - yy'' + \frac{y'}{y} \ln x = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad y(3) = -1, \quad y'(3) = 0, \quad y''(3) = 0.$$

- Zapište interval jejího maximálního řešení.
- Určete s krokem  $h = 0,4$  pomocí Collatzovy metody přibližnou hodnotu řešení  $y''(3.4)$ .

## Numerické řešení okrajové úlohy.

- Dirichlerova úloha pro ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru,

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x), \text{ pro } x \in (a, b),$$

- Dirichletova úloha pro ODR 2. řádu v normálním tvaru

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x) \quad x \in \langle a, b \rangle \subset \mathcal{R}, f_i \in C(\langle a, b \rangle) \quad i = 1, 2, 3$$

- Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení

- (i)  $p, p', q, f$  spojité na  $\langle a, b \rangle$ ,
- (ii)  $p(x) > 0, q(x) \geq 0$  na  $\langle a, b \rangle$ .

- Převod na samoadjungovaný tvar.

**28.** Formulujte Dirichletovu úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2.řádu v samoadjungovaném tvaru

- Uved'te podmínky pro jednoznačnou řešitelnost úlohy (a)
- Zdůvodněte, zda jsou postačující podmínky splněny pro úlohu

$$-(xy')' + \frac{3-x}{x}y = -\ln(2+x) \quad y(1) = 0, y(2) = -4$$

**29.** Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (c-x)y + x^2 = 0 \quad y(2) = -1, y(4) = 3$$

- Danou rovnici převed'te na samoadjungovaný tvar
- Určete všechny hodnoty parametru  $c \in \mathcal{R}$ , pro něž jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy
- Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem  $h = 0.2$  pro  $c = 1$

**30.** Je dána Dirichletova úloha

$$y'' - \frac{4}{x^2-4}y = 1 \quad y(3) = 0, y(5) = -1$$

- Ověřte, že úloha má právě jedno řešení
- Odvod'te soustavu sít'ových rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem  $h = 0.5$

**31.** Je dána rovnice

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{2+x}y = \frac{1}{x-3}$$

- Určete intervaly maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici
- Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy pro danou rovnici s okrajovými podmínkami  $y(-5) = -2, y(-3) = 0$
- Napište první dvě rovnice soustavy sít'ových rovnic která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí s krokem  $h = 0.4$