$2c_2 - 2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1,$

$6c_3 + 2c_2 - 2 = 1 \Rightarrow c_3 = \dfrac{1}{6},$

$12c_4 + 3c_3 + 4c_2 - 1 + c_2 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow c_4 = -\dfrac{5}{12}.$

Řešení Cauchyovy úlohy lze tedy aproximovat v okolí bodu $x_0 = 1$ polynomem

$p(x) = -1 - (x-1) + (x-1)^2 + \dfrac{1}{6}(x-1)^3 - \dfrac{5}{12}(x-1)^4.$

5.5 Úlohy

Číselná řada je dána svým n-tým členem a_n. Zjistěte, zda řada konverguje.

1. $\dfrac{n}{2^n}$ **2.** $\ln n$ **3.** $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ **4.** $\dfrac{n^2}{n^4+3}$ **5.** $\sin\dfrac{\pi}{n}$

6. $\dfrac{1}{n!}$ **7.** $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^4+n+1}}$ **8.** $\dfrac{n+2}{\sqrt{n^5+1}}$ **9.** $\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ **10.** $\dfrac{n!}{3^n}$

11. $\sin^2\dfrac{\pi}{n}$ **12.** $\dfrac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$ **13.** $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ **14.** $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Alternující číselná řada je dána svým n-tým členem. Zjistěte, zda řada konverguje absolutně nebo relativně, či zda diverguje.

15. $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ **16.** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **17.** $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3}$ **18.** $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha},\ \alpha > 0$

19. $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ **20.** $\dfrac{(-1)^n}{n2^n}$.

Dána mocninná řada $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$.

a) Zapište součet prvních čtyř nenulových členů řady.
b) Určete interval, v němž daná řada absolutně konverguje.
c) Zjistěte, v kterých bodech řada konverguje relativně a v kterých diverguje.

21. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x-8)^k}{k5^k}$ **22.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^k}{(k+1)\ln^2(k+1)}$ **23.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2k}}{(k+1)\ln(k+1)}$

24. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ **25.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k (x+3)^k$ **26.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{4k+1}}{k!}$

27. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k(x-1)^{4k+1}}{16^k}$ **28.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3^k(x-4)^k}{(k+1)}$ **29.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-2)^{2k}$

30. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^{k-1}x^{2k-1}}{(4k-3)^2}$ **31.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\sqrt[3]{k+2}\,(x-2)^k}{k+1}$ **32.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^k}{k^2}$

33. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x+2)^{2k} 4^k}{k^2+1}$ 34. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x+3)^{3k}}{27^k (k+1)}$ 35. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x-2)^{2k+1} 4^k}{3k+1}$

36. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^k}{5^k k!}$ 37. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k (x+2)^k 4^k}{3^k (k^2+1)}$ 38. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k (x+2)^{2k}}{k!}$

39. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x+3)^k}{16^k (k^2+1)}$ 40. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} (x+4)^k}{\sqrt{k^3+2}}$ 41. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x+1)^k}{\sqrt[3]{k^4+2}}$

Danou funkci $f(x)$ rozviňte v mocninnou řadu s středem v daném bodě x_0. Určete interval, v němž řada konverguje.

42. $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}, x_0 = 0$ 43. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}, x_0 = 0$

44. $f(x) = \ln(1+x-2x^2), x_0 = 0$ 45. $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x^2-5x+6}, x_0 = 0$

46. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2, x_0 = -4$ 47. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+7}, x_0 = -2$

48. $f(x) = x^2 + 1, x_0 = -2$ 49. $f(x) = \sqrt{(x+1)^3}, x_0 = 0$

50. $f(x) = e^x \sin x, x_0 = 0$ 51. $f(x) = \cos x \sin 3x, x_0 = 0$

52. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} 2x, x_0 = 0$ 53. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+2}, x_0 = 0.$

Dána Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici druhého řádu:
$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, x_0, y_0, y_1 jsou daná čísla.

a) **Ukažte, že daná Cauchyova úloha má právě jedno řešení v intervalu I a určete tento interval.**
b) **Ukažte, že existuje řešení dané Cauchyovy úlohy ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě x_0 a určete interval, v němž je řešení úlohy součtem řady.**
c) **Aproximujte toto řešení polynomem daného stupně n.**

54. $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = 2, n = 5$
55. $y'' + xy' + y = \sin x$, $y(0) = -1, y'(0) = 2, n = 5$
56. $y'' + \dfrac{y'}{x} + y = \dfrac{1}{x}$, $y(2) = -1, y'(2) = 2, n = 4$
57. $y'' + y \operatorname{arctg} x = e^x \cos x$, $y(0) = -1, y'(0) = 2, n = 5$
58. $x^2 y'' + y = x$, $y(-1) = -1, y'(-1) = 2, n = 5$
59. $y'' + \dfrac{4y}{2+x} = \sin x$, $y(0) = 1, y'(0) = -1, n = 4$
60. $y'' + y \operatorname{arctg} x = \dfrac{4}{x+2}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, n = 4$
61. $y'' + y \ln(x+1) = \sin x$, $y(0) = -1, y'(0) = 2, n = 4$

6.5 Úlohy

Určete Fourierovy koeficienty daných periodických funkcí s periodou p a zapište příslušnou Fourierovu řadu.

1. $f(x)=\begin{cases} x+2\pi & x\in(-\pi,0) \\ x & x\in(0,\pi)\end{cases},\ p=2\pi$

2. $f(x)=|x|,\ x\in(-\pi,\pi),\ p=2\pi$

3. $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{4} & x\in(0,\pi) \\ -\frac{\pi}{4} & x\in(-\pi,0)\end{cases},\ p=2\pi$

4. $f(x)=10-x,\ x\in(5,15),\ p=10$

5. Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{x}{2} & x\in\langle -2\pi,0) \\ 0 & x\in\langle 0,2\pi)\end{cases},\ p=4\pi.$

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a v intervalu $J=\langle -4\pi,4\pi\rangle$ znázorněte graf.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a součet prvních čtyř nenulových členů.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu $\langle -2\pi,2\pi\rangle$.

6. Dána funkce $f(x)=-x,\ x\in(0,1)$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty kosinového rozvoje funkce f s periodou $p=2$ a načrtněte graf periodického prodloužení v intervalu (-2 , 2).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-2 , 2>.

7. Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases} 2+x & x\in(-2,0\rangle \\ 2-x & x\in\langle 0,2\rangle\end{cases},\ p=4.$

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu $J=\langle -2,2\rangle$.

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu $J=\langle -4,4\rangle$.

8. Dána funkce $f(x)=x,\ x\in(-1,0)$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty kosinového rozvoje funkce f s periodou $p=2$ a načrtněte graf periodického prodloužení v intervalu (-4 , 4).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-2 , 2>.

9. Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases} 2 & x\in(-3,0) \\ -2 & x\in(0,3)\end{cases},\ p=6.$

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu (-6 , 6).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-4 , 4>.

10. . Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in(-2,0)\\ x-1 & x\in(0,2)\end{cases}$, $p=4$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu (-4 , 4).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-4 , 4>.

11. . Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in(-1,0)\\ 1 & x\in(0,1)\end{cases}$, $p=2$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu (-3 , 3).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-3 , 3>.

12. . Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases}x & x\in(-\pi,0)\\ 0 & x\in(0,\pi)\end{cases}$, $p=2\pi$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu (-2π , 2π).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a prvních šest nenulových členů.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-π , π>.

13. . Dána periodická funkce $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in(-2,0)\\ 1 & x\in(0,2)\end{cases}$, $p=4$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty funkce f a načrtněte graf v intervalu (-4 , 4).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-4 , 4>.

14. Dána funkce $f(x)=x$, $x\in(-1,1)$.

a) Vypočtěte Fourierovy koeficienty sinového rozvoje funkce f s periodou $p=2$ a načrtněte graf periodického prodloužení v intervalu (-2 , 2).

b) Zapište Fourierovu řadu funkce f a její první čtyři nenulové členy.

c) Určete součet Fourierovy řady v intervalu <-2 , 2>.