M3 cv9

Lineární ODR 2. řádu s proměnnými koef. - řešení ve tvaru řad

1. Je dána ODR:
$$y'' + xy' - 2y = f(x). \tag{1}$$

   a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce pravé strany
   $$f(x) = \frac{1}{1-2x},$$
   do Taylorovy řady se středem v bodě $x_0 = 0$. Najděte interval konvergence I této řady.

   Návod: Použijte vzorec pro součet geometrické řady. (viz 2. cvičení)

   b) Ukažte, že Cauchyova úloha pro rovnici (1) s počátečními podmínkami
   $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$,
   má právě jedno maximální řešení na intervalu J. Tento interval určete a ukažte, že řešení existuje pro $I \subset J$.

   Návod: Použijte Větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.

   c) Řešení úlohy aproximujte polynomem 4. stupně (okolo bodu $x_0 = 0$).
   Návod: Rozviňte funkci $y(x)$ do řady
   $$y \approx \sum_{i=0}^{4} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4,$$
   spočtěte její derivace (y' a y'') a dosaďte do rovnice (1) spolu s rozvojem pravé strany (z bodu a). Pak porovnejte koeficienty u jednotlivých mocnin x.

   (koeficienty c_0 a c_1 dostanete z poč. podmínek dosazením ($x_0 = 0$) do řady pro y a y')

2. Je dána Cauchyova úloha:
$$\begin{cases} y'' + y' + e^x y = x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

   a) Určete první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $a_0(x) = e^x$. Určete interval konvergence I_g této řady.

   b) Ukažte, že úloha (2) má právě jedno maximální řešení na intervalu J. Tento interval určete a ukažte, že řešení existuje pro $I \subset J$.

   c) Řešení úlohy (2) aproximujte polynomem 4. stupně.

3. Je dána Cauchyova úloha:
$$\begin{cases} y'' + x^2 y = \ln x, \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = -1. \end{cases} \tag{3}$$

   a) Určete první čtyři nenulové členy rozvoje funkce pravé strany do Taylorovy řady (a rozmyslete si s jakým středem). Najděte interval konvergence I této řady.

   b) Ukažte, že úloha (3) má právě jedno maximální řešení na intervalu J. Tento interval určete a ukažte, že řešení existuje pro $I \subset J$.

   c) Řešení úlohy (3) aproximujte polynomem 4. stupně (tento polynom určete).

4. Je dána Cauchyova úloha:

$$\begin{cases} y'' + y\ln(1+x) = x + e^x, \\ y(0) = -1\,, \quad y'(0) = -1. \end{cases} \tag{4}$$

a) Určete první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $a_0(x) = \ln(x+1)$. Určete interval konvergence I_g této řady.

Návod: Použijte rozvoj $a_0'(x) = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3$ *a integrujte ho člen po členu.*

b) Určete první čtyři nenulové členy Taylorova rozvoje funkce $f(x) = x + e^x$. Určete interval konvergence I_f této řady.

Návod: Využijte Taylorovy řady pro exponenciálu.

c) Ukažte, že úloha (4) má právě jedno maximální řešení na intervalu J. Tento interval určete a ukažte, že řešení existuje pro $(Ig \cap I_f) \subset J$.

d) Řešení úlohy (4) aproximujte polynomem 5. stupně.

Návod: Spočtěte součin řad pro y *a pro* $a_0(x) = \ln(1+x)$. *Dosaďte do rovnice (4) spolu s řadou pro pravou stranu* $f(x)$ *a porovnejte koeficienty u stejných mocnin* x.