M3 cv10

Soustavy lineárních ODR 1. řádu (zatím ne nutně autonomní)

1. Dán systém rovnic:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} X, \qquad X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{kde} \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Zapište systém jako soustavu dvou ODR.

   (b) Převeďte soustavu na jednu ODR 2.řádu.

   (c) Ověřte, že následující vektorové funkce tvoří Fundamentální Systém soustavy:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (d) Najděte obecné řešení a vyřešte příslušnou Cauchyovu úlohu.

2. Dána homogenní soustava rovnic:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X; \qquad \text{kde} \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Zapište systém ($\dot{X} = A\,X$) jako soustavu dvou ODR.

   (b) Ověřte, že následující vektorové funkce tvoří Fundamentální Systém soustavy:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix}$$

   (c) Napiště obecné řešení homogenní soustavy (X_H).

   (d) Vyřešte Cauchyovu úlohu pro počáteční podmínku $x(0) = 1$ a $y(0) = 1$.

3. Ne-homogenní soustavu

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t^2 \\ t+4 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; \qquad \text{kde} \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

   (a) převeďte na jednu ODR 2.řádu.

   (b) Z rovnice v bodě (a) určete partikulární řešení systému X_p.
   (Najděte partikulární řešení ODR 2. řádu x_p a použijte 1. rovnici soustavy pro nalezení y_p)

   (c) Najděte obecné řešení ne-homogenní soustavy (X_H máte z př. 2) a vyřešte příslušnou Cauchyovu úlohu.

4. Rovnici 2. řádu $\ddot{x} - \frac{2}{t}\dot{x} - \frac{4}{t^2}x = 0$ s poč. podm. $x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 9$
převeďte na soustavu dvou rovnic 1.řádu a zapište ve tvaru:

$$\dot{X} = A(t)X, \qquad \text{kde} \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(a) Ověřte, že následující vektorové funkce tvoří Fundamentální Systém soustavy:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

(b) Najděte obecné řešení a vyřešte příslušnou Cauchyovu úlohu

(c) Napište časovou závislost rychlosti $(\dot{x}(t))$ pro danou Cauchyovu úlohu.

5. Danou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{t}x - y & \qquad x(1) &= 1 \\ \dot{y} &= \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}y, & \qquad y(1) &= 2 \end{aligned}$$

(a) Zapište jako systém ve vektorovém tvaru $\dot{X} = A(t)X$.

(b) Ověřte, že následující vektorové funkce tvoří Fundamentální Systém soustavy:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t(1 + \ln t) \end{pmatrix}$$

(c) Najděte obecné řešení a vyřešte příslušnou Cauchyovu úlohu.