M3 cv1

1 Posloupnosti

U daných posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ napište první 4 členy, najděte předpis pro obecný člen (není-li zadán) a limitu posloupnosti

1. $a_k = \frac{k}{k+2}$
2. $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$
3. $a_k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
4. aritmetická posl. s $a_1 = -2$ a $d = 5$
5. geometrická posl. s $a_1 = 2$ a $q = -1/2$

bonus (*pro A-úroveň*): Jsou dané posloupnosti monotónní, a pokud ano uměli byste to dokázat?

2 Číselné řady

U daných řad napište první 4 členy (částečné součty) a rozhodněte zda řada konverguje:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
4. aritmetická řada s $a_1 = -2$ a $d = 5$
5. geometrická řada s $a_1 = 2$ a $q = -1/2$

Rozhodněte zda následující řady konvergují (+zdůvodněte proč např. použitím nějakého kritéria):

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^k$
7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{-k}$
8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}^+$ (*pro B-úroveň* stačí $\alpha = 1$ a $\alpha = 2$)
9. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ \ln k}$
10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{(k+1)^4}}$
11. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(3k+1)3^k}$
12. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$

3 Taylorova řada

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady obecného stupně n okolo bodu x_0:
(*pro B-úroveň* stačí stupeň $n = 3$):

13. $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 2$
14. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
15. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$
16. $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

pozn.: Dobré je též znát aproximace následujících funkcí okolo bodu $x_0 = 0$:

- $\sin(x) \approx \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\cos(x) \approx \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$