

A

Jméno a Příjmení: .....

1. Napište Jakobián pro transformaci  $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, \varphi)$  danou:

$x = r \cos \varphi \cos \theta$

$y = r \sin \varphi \cos \theta$

$z = r \sin \theta$

*spín. rovnice,*

$|J| = r^2 \cos \theta$

2. Převeďte / Přepište zadaný integrál do válcových souřadnic.

Dále nepočítejte!

$$\iiint_T \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{xz} dx dy dz = \iiint_{T^*} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r \cdot h \cdot \cos \varphi} r dr d\theta dh$$

3. Převeďte / Přepište zadaný integrál do sférických souřadnic.

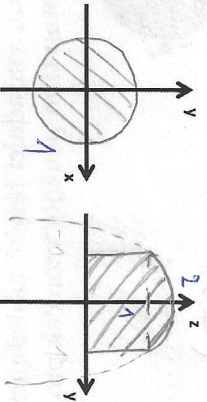
Dále nepočítejte!

$$\iiint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \iiint_{D^*} \frac{r \cos \theta}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

4. Vypočítejte integrál. (Výsledek ve tvaru rozdílu zlomků ok).

$$\int_0^{2\sqrt{1-x}} \int_0^x xy dy dx = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

5. Nakreslete těleso zadané nerovnicemi  $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$  v řezech - v pohledu zeshora a z boku.

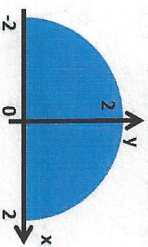


B

Jméno a Příjmení: .....

1. Vypočítejte  $y$ -ovou souřadnici těžiště půlkruhu s  $\rho = 2$ .

Pro výpočet hmotnosti  $m$  použijte vzoreček pro obsah kruhu.



$(m_m = 4\pi)$

$y_T = \frac{8}{3\pi}$

2. Napište jaké těleso je popsáno následujícími nerovnicemi. Napište souřadnice středu a o jakou část tělesa se případně jedná.

$0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

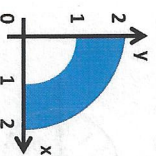
*polokoule (horní) S = [0,0,0]...*

3. Vypočítejte integrál.

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^2 \int_0^2 r \cos \varphi dz d\varphi dr = 2$$

4. Popište následující těleso pomocí nerovnic (intervalů).

Bonus = každý další způsob = +0,5b.



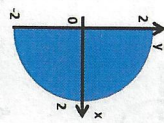
$1 \leq r \leq 2$  &  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$   
 $0 \leq x \leq 2$  &  $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$   
 $0 \leq y \leq 2$  &  $\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$

5. Napište alespoň dva možné fyzikální významy integrálu (pro jednotlivé případy uveďte  $\rho$ ).

$$\iint_T x^2 y dx dy$$

1)  $\rho = x^2 y \rightarrow$  *hmotnost*  
 2)  $\rho = x^2 \rightarrow$   $M_x$   
 $x^2 y$   $M_y$   $y^2$

6. Vypočítejte  $x$ -ovou souřadnici těžiště následujícího tělesa s  $\rho = 1$ .  
Pro výpočet hmotnosti  $m$  použijte vzoreček pro obsah kruhu.



$x_T = \dots \frac{8}{3\pi} \dots$   
( $m = 2\pi$ )

7. Napište jaké těleso je popsáno následujícími nerovnicemi. Napište souřadnice vrcholu a o jakou část tělesa se případně jedná.

$(z - 2)^2 \leq x^2 + y^2 \wedge 0 \leq z \leq 2$

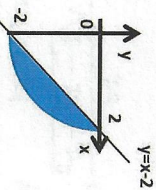
kužel  $S = [0, 0, 2]$

8. Vypočítejte integrál.

$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \dots 2\pi \dots$

9. Popište následující těleso pomocí nerovnic (intervalů).

Bonus = každý další způsob = +0, 5b.

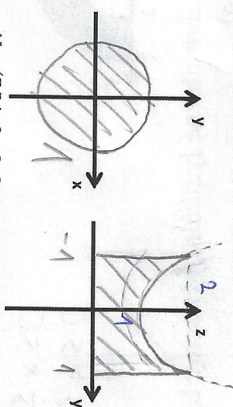


$0 \leq x \leq 2$  &  $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq x-2$   
 $-2 \leq y \leq 0$  &  $y+2 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$   
 $\cos^{-1} \frac{y}{2} \leq x \leq 2$  &  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$

10. Napište alespoň dva možné fyzikální významy integrálu (pro jednotlivé případy uveďte  $\rho$ ).

$\iint_T xy \, dx \, dy$  1)  $\rho = \dots xy \rightarrow \dots$  kumulovaný  
2)  $\rho = \dots x \rightarrow \dots$   $M_x$

6. Nakreslete těleso zadané nerovnicemi  $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$  v řezech - v pohledu zeshora a z boku.



7. Vypočítejte integrál. (Výsledek v tvaru součtu zlomků ok).

$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1+y}} xy \, dx \, dy = \dots 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \dots$

8. Převěďte / Přepište zadaný integrál do válcových souřadnic.

Dále nepočítejte!

$\iiint_D \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)^3 - 10}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D^*} \frac{\sqrt{r^2 - 10}}{\sqrt{r^2 - r^2}} \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz$

9. Převěďte / Přepište zadaný integrál do polárních souřadnic.

Dále pak nepočítejte!

$\iint_D \frac{5xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx = \iint_{D^*} 5r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot r \, dr \, d\varphi$

10. Napište Jakobíán pro transformaci  $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$  danou:

$x = 1 + r \cos \varphi$

$y = -1 + r \sin \varphi$

$|J| = \dots r \dots$