MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek (2015)
doplněné o další úlohy

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

3. část KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY, GREENOVA VĚTA, POTENCIÁLNÍ VEKTOROVÉ POLE, PLOŠNÉ INTEGRÁLY, GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2].

[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. *(Sbírka řešených i neřešených příkladů)*

[3] **Matematika II - vybrané úlohy ze zkoušek**, 2. část: Dvojný a trojný integrál (2015). Web ÚTM.

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A (Alfa), resp. B (Beta), ale jako orientační rozlišení. Rozsahem a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1 až 3, 6, 8a, 9, 12, 13, 17, 19, 22 až 26, 29, 32, 35, 36, 41 až 43, 47.

Zkoušce úrovně A odpovídají např. úlohy 3 až 8, 10, 11, 14 až 21, 24 až 31, 33, 34, 36 až 40, 43 až 58.

Obrázky stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, **popis** křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité (průsečíky křivek ap.)

Křivkový integrál skalární funkce, křivkový integrál vektorové funkce, Greenova věta

V následujících pěti úlohách je dána křivka C a délková hustota ϱ.

a) Navrhněte parametrizaci $X = P(t),\ t \in \langle a, b\rangle$ dané křivky C a určete délku vektoru $\dot{P}(t)$.

b) Vypočítejte hmotnost křivky C, je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ϱ.

c) Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

1. $C : x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0$, $\varrho(x, y) = x$. [$m = 18$; statický moment M_y (vzhledem k ose y), je-li $\varrho(x, y) = 1$]

2. $C : x = 3 \cos t,\ y = 3 \sin t,\ z = t/3;\ t \in \langle 0, 3\rangle,\ \ \varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
[$m = 28\sqrt{82}/3$, c) moment setrvačnosti J_0 (vzhledem k počátku), je-li $\varrho(x, y, z) = 1$]

3. $C : x = 2 \cos t,\ y = 2 \sin t,\ z = t/4;\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ \ \varrho(x, y, z) = z^2/(x^2 + y^2)$
[$m = \sqrt{65}\,\pi^3/96$, c) moment setrvačnosti J_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\varrho(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2)$]

4. $C : y = \frac{x^2}{2} + 2$ mezi body $A = [0, 2]$, $B = [2, 4]$, $\varrho(x, y) = x$. [$m = (5\sqrt{5} - 1)/3$, c) viz úloha č. 1]

5. $C : x = t \cos t,\ y = t \sin t,\ z = t;\ t \in \langle 0, 1\rangle,\ \varrho(x, y, z) = z$.
[$m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3$, c) statický moment M_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\varrho(x, y, z) = 1$]

6. Křivka C je dána parametrizací $X = P(t)$: $x = \cos t,\ y = 3 \sin t,\ z = \sqrt{8} \cos t,\ \ t \in \langle 0; 2\pi\rangle$.
a) Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
b) Vypočítejte křivkový integrál $\int_C f\ \mathrm{d}s$, kde $f(x, y, z) = xy + 2$. [$12\,\pi$]

7. Zdůvodněte, na které z křivek
a) C je kružnice $x^2 - 2x + y^2 = 0$, b) C je úsečka AB, kde $A = [2, 3]$, $B = [0, 1]$
existuje integrál
$$\int_C \frac{3 - y}{y - x + 2}\ \mathrm{d}s\,?$$
Příslušný integrál pak vypočítejte pomocí parametrizace křivky C.
[a) ne, daná funkce není na křivce C omezená, b) existuje, daná funkce je na úsečce AB spojitá, výsl.: $\sqrt{8}/3$]

8. Vypočítejte délku dané křivky C:
a) $C : x = 2 \cos t,\ y = 2 \sin t,\ z = t/2;\ \ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (jeden závit šroubovice) [délka $l = \pi\,\sqrt{17}$]
b) $C : y = \frac{1}{3}x\,\sqrt{x}, x \in \langle 0; 5\rangle$ [délka $l = 19/3$]
c) $C : x = R \cos t,\ y = R \sin t,\ z = at;\ \ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (jeden závit šroubovice, $R > 0$, $a > 0$ jsou konstanty).
[délka $l = 2\,\pi\,\sqrt{R^2 + a^2}$]
d) $C : x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t,\ t \in \langle 0, \pi/2\rangle$ (část asteroidy v prvním kvadrantu, $a > 0$ je konstanta).
[délka $l = 3a/2$]

9. a) C je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$.
Navrhněte parametrizaci křivky a užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x^2\,,\, xy)$ působením po křivce C.
b) Křivka K je úsečka AB, kde $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$. Navrhněte parametrizaci křivky K a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$. [a) 232/15, b) m=$16\sqrt{10}/3$]

10. Křivka C je úsečka AB, kde $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$.
a) Vypočítejte hmotnost této křivky C, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.
b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x\sqrt{y^2 - 2x}\,,\, 0)$ podél této úsečky C od bodu A do bodu B.
[a) m=$8\sqrt{2}/3$, b) $(\sqrt{8} - 1)/3$]

11. Křivka C je průnikem daných dvou ploch. Navrhněte parametrizaci této křivky a vypočitejte křivkový integrál dané skalární funkce f.
a) $f(x, y, z) = y^2 + 2z^2$, křivka C je průnikem rovin $x + y + 2z = 5,\ 2x + 5y - 2z = 4$ v nezáporném oktantu, tj. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. [Parametrizace např. $x = 7 - 4t, y = 2t - 2, z = t, t \in \langle 1, 7/4\rangle$, výsl. $111\sqrt{21}/32$]
b) $f(x, y, z) = z^2$, křivka C je průnikem válcové plochy $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ a roviny $4x - 3z = 0$. [80π]

12. a) Napište Greenovu větu (předpoklady a tvrzení).
b) Načrtněte množinu $M = \{[x, y]\ :\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. Vyznačte křivku C, která je kladně orientovanou hranicí této množiny M.
c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (xy,\, x^2 + 2x)$ podél křivky C, tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
(Doporučení: K výpočtu je vhodné použít Greenovu větu). [$8/3 + \pi$]

13. Křivka C je záporně orientovaný obvod trojúhelníka s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$.
a) Načrtněte křivku C (včetně dané orientace).
b) Přímým výpočtem pomocí parametrizace křivky C nebo užitím Greenovy věty určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (y^2 - 3y,\, xy)$ podél křivky C, tj. křivkový integrál $\oint_C (y^2 - 3y,\, xy) \cdot d\vec{s}$. [$-14/3$]
13.1. Varianta této úlohy: Křivka C je záporně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy [0,0], [3,0], [3,1], [0,1], vektorové pole $\vec{f} = (\frac{1}{3}\, y^3,\, x^2 + y^2)$. [cirkulace je -8]

14. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x+1\,,\, 2y)$ působením po dané orientované křivce:
a) C_1: úsečka AB, s počátečním bodem $A = [-1, 0]$ a koncovým bodem $B = [1, 0]$.
b) C_2: $x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0$ s počátečním bodem $B = [1, 0]$.
c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce $C = C_1 \cup C_2$. Souvisí výsledek s nějakou vlastností pole $\vec{f}$? (Vysvětlete).
[a) 2, b) -2, c) nula. Ano, neboť dané pole je potenciální...]

V následujících čtyřech úlohách je dáno vektorové pole a orientovaná křivka.
a) Načrtněte danou křivku $C \subset E_2$. Navrhněte její parametrizaci a zdůvodněte, zda je křivka C orientována souhlasně s touto parametrizací.
b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f}$ působením po dané orientované křivce C.

15. C je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$, síla $\vec{f} = (\sqrt{x}+y, x+\sqrt{y})$. [$-(40+32\sqrt{2})/3$]

16. Křivka C daná rovnicí $y = \mathrm{e}^x$, kde $|x| \le 1$, počáteční bod má $x = -1$, síla $\vec{f} = \left(x^3\,,\, \dfrac{1}{y}\ln y\right)$. [nula]

17. Křivka C je levá polovina kružnice $x^2 + y^2 = 4$ orientovaná od bodu $[0, 2]$ k bodu $[0, -2]$,
síla $\vec{f} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2},\, \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\right)$. [$-\pi$]

18. C je záporně orientovaná křivka daná rovnicí $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, síla $\vec{f} = \left(\dfrac{2y}{x^2 + 4y^2},\, -\dfrac{2x}{x^2 + 4y^2}\right)$
c) Je možné v této úloze počítat práci pomocí Greenovy věty? (Odpověď zdůvodněte.)
[b) 2π, c) nelze]

19. a) Napište předpoklady Greenovy věty a ověřte, že jsou splněny pro výpočet cirkulace vektorového pole $\vec{f} = (-y,\, x)$ po záporně orientované křivce $C:\ x^2 + y^2 = 16$, tj. pro výpočet $\displaystyle\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
b) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.
c) Lze na základě vypočtené hodnoty jednoznačně odpovědět, zda dané pole $\vec{f}$ je potenciální v E_2? Odpověď zdůvodněte! [cirkulace je -32π, c) není potenciální, cirkulace by musela být nulová]

V následujících dvou úlohách je dán křivkový integrál vektorové funkce.

a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet zadaného integrálu.

b) V kladném případě integrál pomocí Greenovy věty vypočítejte.

20. $\oint_C \left(-\frac{1}{x^2},\, 2x\right) \cdot \vec{ds}$, je-li křivka C kladně orientovaná a je postupně vyjádřena rovnicí
1) $x^2 + y^2 = 1$, 2) $x^2 - 2x + y^2 = 0$, 3) $(x-2)^2 + y^2 = 1$.
[integrály 1) a 2) neexistují, 3) 2π, větu lze použít]

21. $\oint_C y^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, je-li C kladně orientovaný obvod trojúhelníku PQR, kde
$P = [4,0]$, $Q = [4,4]$, $R = [0,4]$. [128/3, větu lze použít]

Poznámka: Další úlohy s použitím Greenovy věty si můžete tvořit sami. Uvažujme např. křivku C jako záporně orientovanou hranici množiny D z příkladu č. 14 v 2. části souboru Úlohy ze zkoušek (Dvojný a trojný integrál). Pak při volbě vektorové funkce $\vec{f} = (2y^3/3,\, xy^2)$ vede Greenova věta právě ke dvojnému integrálu z příkladu 14, tj. $\int\int_D y^2\,dxdy$ s výsledkem 13/60. Pro stejný výsledek je nekonečně mnoho dalších možností volby vektorové funkce, např. $\vec{f} = (2y^3/3 + g(x),\, xy^2 + h(y))$, kde g, h jsou libovolné funkce jedné proměnné se spojitou derivací v $\mathbb{R}$.

Potenciál, nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě

22. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 3y\,,\, 3x)$ působením po orientované úsečce s počátečním bodem $A = [0,1]$ a koncovým bodem $B = [1,3]$. [19/2]
b) Určete potenciál φ vektorového pole $\vec{f} = (x+3y\,,\, 3x)$. Pomocí potenciálu vypočítejte práci z úlohy a).
[potenciál $\varphi(x,y) = x^2/2 + 3xy + konst$, 19/2]

23. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (y^2\,,\, 2xy)$ působením po křivce C, což je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0,0]$ a koncovým bodem $B = [2,4]$.
b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (y^2\,,\, 2xy)$ je potenciální v E_2. Určete potenciál φ tohoto pole a pomocí něho vypočítejte práci z úlohy a). [a) 32, b) potenciál $\varphi(x,y) = xy^2 + konst$]

24. a) Zjistěte, zda vektorové pole $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Pokud ano, vypočítejte potenciál φ.
b) Vypočítejte křivkový integrál této funkce $\vec{f}$ po části paraboly $C_1 : x = -y^2 - 1$ od bodu [-1; 0] do bodu [-5; -2].
c) Určete cirkulaci tohoto pole $\vec{f}$ podél kladně orientované křivky $C_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.
[a) potenciál $\varphi(x,y) = x^2 - xy^2 + 3y + konst$, b) 38, c) nula]

25. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (-x\,,\, y)$ působením po křivce C, která je částí kružnice se středem v počátku, a to od bodu $A = [2,0]$ do bodu $B = [0,2]$.
b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (-x\,,\, y)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Určete potenciál φ tohoto pole $\vec{f}$ a pomocí potenciálu pak vypočítejte práci z úlohy a). [a) 4, b) potenciál $\varphi(x,y) = -x^2/2 + y^2/2 + konst$]

26. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset E_2$ na integrační cestě.
b) Zdůvodněte, zda $\int_C (y \sin x\,,\, y - \cos x) \cdot \vec{ds}$ nezávisí v E_2 na integrační cestě.
c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y \sin x\,,\, y - \cos x)$ v E_2, najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce C s poč. bodem $A = [0,0]$ a konc. bodem $B = [0,\pi]$.
[b) ověřte splnění postačující podmínky c) potenciál $\varphi(x,y) = y^2/2 - y \cos x + konst$, $\pi^2/2 - \pi$]

27. a) Zjistěte, zda funkce $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + z^2$ je potenciálem vektorového pole

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\, \frac{y}{x^2+y^2}\,,\, 2z\right)$$

v oblasti $G = \{[x,y,z] \in E_3\,;\; x^2+y^2 > 0\}$.
b) Vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde C křivka v G s počátečním bodem $[1,0,0]$ a koncovým bodem $[0,1,1]$. [a) ano, b) 1]

28. Funkce $\psi = xy + xz + yz$ je potenciálem nějakého vektorového pole $\vec{f}$.
a) Určete největší oblast v E_3, ve které má ψ spojité parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole $\vec{f}$.
b) Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem $\vec{f}$ v této oblasti, pak ji uveďte.
c) Vypočítejte $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde C je křivka daná parametricky rovnicemi $x = -1 + t$, $y = 2 + t/2$, $z = -\cos(t\pi/4)$ pro $t \in \langle 0,4\rangle$. [a) $\vec{f} = (y+z,\, x+z,\, x+y)$ b) funkce $\psi + konst$, c) 22]

V následujících třech úlohách je dáno vektorové pole $\vec{f}$.

a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ bylo potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$.

b) Ověřte, že postačující podmínky splněny pro dané vektorové pole $\vec{f}$ a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou),

c) Určete potenciál a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce C.

29. $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x})$, uveďte největší možnou oblast D, C je křivka s počátečním bodem $A = [1, 2]$ a koncovým bodem $B = [4; -2]$. [b) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x > 0\}$, c) potenciál $\varphi(x, y) = 2\,y^2\sqrt{x} + konst$; 8]

30. $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 ;\ x > 0,\ y > 0\}$, C_1 je úsečka AB s počátečním bodem $A = [2, 4]$ a koncovým bodem $B = [1, 2]$, C_2 je kladně orientovaná kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$.
[c) potenciál $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + konst$; $-\ln 2$ pro C_1, nula pro C_2]

31. $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x} + x^2, 2y\ln x - \cos 2y)$, uveďte největší možnou oblast D, C je křivka s počátečním bodem $A = [1, \pi/4]$ a koncovým bodem $B = [2; 0]$. [potenciál $\varphi(x, y) = x^3/3 + y^2\ln x - \sin 2y/2 + konst$, 17/6]

Plošný integrál skalární funkce, plošný obsah

32. Je dána plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geqq 0\}$.
a) Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q, napište vektor kolmý k dané ploše a určete jeho délku (při této parametrizaci).
b) Určete hmotnost plochy Q, je-li její plošná hustota $\varrho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.
Návod: Při parametrizaci $z = g(x, y), [x, y] \in B$ je $m = \iint_Q \varrho(x, y, z)\mathrm{d}p = \iint_B \varrho(x, y, g(x, y))\|P_x \times P_y\|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
[a) Q je část paraboloidu s vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$,
b) např. při parametrizaci $z = 4 - x^2 - y^2, [x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 4$ je kolmý vektor $\vec{n} = P_x \times P_y = (2x, 2y, 1)$, jeho délka je $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ c) 36π]

33. Je dána plocha Q (hyperbolický paraboloid): $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 3\}$.
a) Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.
b) Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q. Napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).
c) Určete plošný obsah plochy Q.
[a) hyperbola $xy = 1$, parabola $z = x^2$ v rovině $y = x$, parabola $z = -x^2$ v rovině $y = -x$,
b) např. při parametrizaci $z = xy$, $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 3$ je $\vec{n} = P_x \times P_y = (-y, -x, 1)$, c) $14\pi/3$]

34. a) Vypočítejte $\iint_Q xyz\,\mathrm{d}p$, kde plocha $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \in \langle 0, 3\rangle\}$.
b) Vypočítejte $\iint_Q xyz\,\mathrm{d}p$, je-li $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ x^2 + y^2 = 4,\ z \in \langle 0, 3\rangle\}$.
c) Co by mohl vyjadřovat integrál z úlohy a) ?
[a) 18, b) nula, c) hmotnost dané plochy, je-li plošná hustota $\varrho(x, y, z) = xyz$, statický moment M_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\varrho(x, y, z) = xy$, též cyklicky M_{xz} a M_{yz}.]

V následujících pěti úlohách je dána plocha $Q \subset E_3$.

a) Načrtněte danou plochu Q a navrhněte její parametrizaci. Vypočítejte délku vektoru kolmého k ploše Q (při navržené parametrizaci).

b) Určete plošný obsah dané plochy.

35. $Q:\ 3x + 4y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ $\left[\dfrac{\sqrt{26}}{24}\right]$

36. $Q:\ x + 2y + z = 6,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $[3\pi\sqrt{6}]$

37. $Q:\ z = y^2 - x^2,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $\left[\dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\right]$

38. $Q:\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1$ $\left[\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$

39. $Q:\ z = \sqrt{12 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq 8$ $[8\pi(3 - \sqrt{3})]$

40. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy Q (hustota $\varrho(x, y, z) = konst$), je-li $Q:\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 2$. $[8\,k\pi\sqrt{2}]$

Plošný integrál vektorové funkce, tok vektorového pole plochou

V následujících osmi úlohách je dána plocha σ.

a) Načrtněte danou plochu a navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k ploše (při této parametrizaci).

b) Vypočítejte tok zadaného vektorového pole $\vec{f}$ plochou σ při orientaci daným normálovým vektorem $\vec{n}$.

41. $\vec{f} = (3x, 2y, z)$, σ je část roviny: $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3\,;\ 2x + 2y + z = 4,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [7]

42. $\vec{f} = (x, y, 0)$, $\sigma:\ z = 9 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má souřadnici n_3 kladnou. [$81\,\pi$]

43. $\vec{f} = (z, y, 2x)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x + 2y + z = 6,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [72]

44. $\vec{f} = (y, x, z)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x^2 + y^2 = 16,\ 0 \le z \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, $\vec{n}(4, 0, 0) = \vec{i}$. [48]

45. $\vec{f} = (x, 0, 2z)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3\,;\ z = x^2 + y^2,\ z \le 9\}$, $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý. [$-81\,\pi/2$]

46. $\vec{f} = (-y, x, z)$, plocha $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3\,;\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 3,\ x \ge 0\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [$9\,\pi$]

47. $\vec{f} = (y, x, 0)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ z = x^2 + y^2,\ z \le 4\}$, $\vec{n}$ svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [nula]

48. $\vec{f} = (z, x^2 + y^2, 1)$, $\sigma:\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 2,\ y \ge 0,\ \vec{n} \cdot \vec{k} < 0$. [$-2\pi + 8$]

Gaussova–Ostrogradského věta umožňuje převést výpočet toku vektorového pole uzavřenou plochou na výpočet trojného integrálu. K procvičení jeho výpočtu se lze vrátit k úlohám z textu
[3] **Matematika II - vybrané úlohy ze zkoušek**, 2. část: Dvojný a trojný integrál (2015). Web ÚTM.
Podobným způsobem jako v Poznámce na str. 3 tohoto textu, tj. vhodnou volbou vektorového pole $\vec{f} = (U, V, W)$ lze tak tvořit příklady, které mohou v úlohách z trojného integrálu představovat aplikaci ve formě toku vektorového pole daným směrem - viz. př. č. 52, 53 a 56 níže.

V následujících úlohách je dána plocha Q.

a) Napište Gaussovu–Ostrogradského větu. Načrtněte danou plochu. Ověřte, že jsou splněny předpoklady pro výpočet toku zadaného vektorového pole $\vec{f}$ touto plochou. b) Vypočítejte tok daného vektorového pole.

49. $\vec{f} = (x + \cos x, y + \mathrm{e}^z, z + z \sin x)$, Q je dovnitř orientovaný povrch tělesa, které je omezené plochami o rovnicích $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$. [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 3$, tok $\Phi = -24\pi$]

50. $\vec{f} = (x^3, z^2, y^2)$, plocha Q je povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \leqq z \leqq 3\}$, plocha Q je vně orientovaná. [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 3x^2$, tok $\Phi = 36\pi$]

51. $\vec{f} = (y, x, z^2)$, plocha Q je povrchem tělesa $M = \{\,[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$, plocha Q je orientována vnější normálou. [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 2z$, tok $\Phi = 8\pi$]

52. $\vec{f} = (y^2, x + z, zx^2)$, Q je povrch tělesa $D:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x - 2y$ orientovaný směrem dovnitř (*viz př. č. 34 z Úloh [3]*). [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = x^2$, tok $\Phi = -1/4$]

53. $\vec{f} = (x, y, z)$, Q je povrch tělesa $D:\ x \le 2,\ y \le 2,\ y \ge 1/x,\ 0 \le z \le x^2 + y$ orientovaný směrem vně (*obměna př. č. 45c z Úloh [3]*). [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 3$, tok $\Phi = 135/8$]

54. $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0$, $Q_2:\ z = 0,\ x^2 + y^2 \le 1$, plocha Q je orientována směrem do svého vnitřku. (Daná plocha je povrch polokoule.)
[$\operatorname{div} \vec{f} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, tok $\Phi = -6\pi/5$]

55. $\vec{f} = (2x + y^2, 0, 2x - y^2)$, Q je povrch tělesa $D: \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 9$, orientovaný směrem vně.
[$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 2$, tok $\Phi = 486\,\pi$]

56. $\vec{f} = (xy^2, z\mathrm{e}^{-x}, zx^2)$, Q je dovnitř orientovaný povrch tělesa $M: \sqrt{3x^2 + 3y^2} \le z \le 3$, (*viz př. č. 51 z Úloh [3]*). [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = x^2 + y^2$, tok $\Phi = -27\pi/10$]

57. $\vec{f} = (z, y^3, x)$, Q je vně orientovaný povrch tělesa $D: x^2 + y^2 \le z \le 4$. [$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = 3y^2$, tok $\Phi = 16\,\pi$]

58. $\vec{f} = (xy^2, yz, x^2 z)$, Q je vně orientovaný povrch tělesa, které je omezeno plochami $x^2 + y^2 = 4,\ z = 1,\ z = 3$.
[$\operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, tok $\Phi = 32\,\pi$]