Nal ... (e-mail:
Frantis

Něl
[1]
[2] ... lavatelství
ČVUT

Nás ... ., ale jako
orienta ... 11, 13 až
15, 26
Zk ... 5.
Ob ... ɔch) a vy-
značen

Dvojný integrál

V následujících úlohách je omezená množina $D \subset \mathbb{E}_2$ zadána nerovnicemi nebo hraničními křivkami.

a) Načrtněte množinu D.

b) Ověřte splnění předpokladů pro použití Fubiniovy věty (spojitost funkce na dané množině a její **vyjádření ve tvaru elementárního oboru integrace** vzhledem ke vhodně zvolené ose). Vypočítejte $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$.

c) V úlohách 1, 3-12, 15, 17, 19 - 25 uveďte alespoň **dva příklady možného fyzikálního významu** daného integrálu. Uveďte přesně, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment nebo moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu nebo přímce).

d) V úlohách 2, 5, 7, 10-12, 18 a 21-24 se pokuste představit si, slovně popsat a případně i načrtnout **těleso v $\mathbb{E}_3$, jehož objem je roven hodnotě daného integrálu**.

1. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2x+1\}$ b) $f(x,y) = x^2 y$
2. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x,\ y = 2x,\ x = 2$ b) $f(x,y) = x + y$
3. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x = 1$ b) $f(x,y) = 2xy$
4. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x/2,\ y = 3x,\ y = 2$ b) $f(x,y) = x\sqrt{y}$
5. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ b) $f(x,y) = x$
6. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x \ge 0,\, y \le x+2,\, y \ge x^2\}$ b) $f(x,y) = 2x(y+1)$
7. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = xy$
8. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\}$ b) $f(x,y) = xy^2$
9. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x,\ y = 1/x,\ y = 2$ b) $f(x,y) = xy^2$
10. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = 2x,\ y = 2/x,\ x = 2$ b) $f(x,y) = xy$
11. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x \ge 0,\, x + y \le 2,\, x \le y^2\}$ b) $f(x,y) = xy$
12. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $x = 1,\ x = y^2 + 2, y = 0, y = 2,$ b) $f(x,y) = y/\sqrt{x}$
13. a) $D \subset \mathbb{E}_2$ je ohraničena křivkami: $y = x,\ y = 1/x,\ x = 3$ b) $f(x,y) = \sqrt{x}$
14. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; y \ge 0,\, y \le 2 - x,\, x \ge y^2\}$ b) $f(x,y) = y^2$
15. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x + y \le 1,\ x + 1 \ge y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
16. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x + y \le \pi,\ x - y \le \pi,\ x \ge 0\}$ b) $f(x,y) = \sin(x+y)$
17. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x^2 + 9y^2 \le 9,\ x \ge 0\}$ b) $f(x,y) = y^2$
18. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
19. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; y \ge x^2,\ y \le 12 - x^2\}$ b) $f(x,y) = |x|$

20. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = y\,\sqrt{x^2+4y^2}$

21. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y^2 - x^2 \le 1,\ 0 \le x \le 2,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = y$

22. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ 36x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = xy$

23. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \le 4x,\ y \ge 0\}$ b) $f(x,y) = xy$

24. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\}$ b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

25. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \ge \ln x,\ x \ge 1,\ y \le 1\}$ b) $f(x,y) = 1/x$

V úloze 25 převeďte dvojný integrál oběma způsoby na dvojnásobný (tj. obě pořadí integrace). Pak zvolte jednu z možností a integrál vypočítejte.

Výsledky: **1.** b) 16/15, c) hmotnost, když $\varrho(x,y) = x^2\,y$; moment setrvačnosti J_y (vzhledem k ose y), je-li $\varrho(x,y) = y$; statický moment m_x (vzhledem k ose x), je-li $\varrho(x,y) = x^2$. Podobně v dalších úlohách. **2.** 20/3 **3.** 1 **4.** $40\sqrt{2}/9$ **5.** 3/20 **6.** 52/3 **7.** b) 2, d) čtvrtina "válce"(v nezáporném oktantu), "horní podstavou"je hyperbolický paraboloid $z = xy$ (sedlová plocha) **8.** 48/5 **9.** 13/5 **10.** $15/2 - 2\ln 2$ **11.** 7/24 **12.** $4\sqrt{6} - 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ **13.** $8(1+\sqrt{3})/5$ **14.** 13/60 **15.** b) 1/3, c) moment setrvačnosti J_0 (vzhledem k počátku), je-li $\varrho(x,y) = 1$; **16.** π **17.** $3\pi/8$ **18.** 9π **19.** 36 **20.** 2 **21.** 7/3 **22.** 9/32 **23.** 32/3 **24.** $\pi(1-\mathrm{e}^{-4})/2$ **25.** 1/2

26. Načrtněte rovinný obrazec, který je omezen danými křivkami. Určete jeho plošný obsah P.
   a) $y = x,\ y = x^2 - 2$ [Výsl.: $P = 9/2$]
   b) $2x + 2y = 5,\ xy = 1$ [Výsl.: $P = 15/8 - \ln 4$]
   c) $y = x/2,\ xy = 2,\ y = 4$ [Výsl.: $P = 15 - 2\ln 4$]
   d) $y = x - 1,\ y = -1,\ y = \ln x$ [Výsl.: $P = 1/2 - 1/e$]
   e) $y = x,\ y^2 = x + 2$ [Výsl.: $P = 9/2$]

27. V následujících třech úlohách určete hmotnost m rovinné desky D při dané plošné hustotě $\varrho(x,y)$.
   a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y \le x+2,\ y \ge x^2,\ x \ge 0\}$, $\varrho(x,y) = xy$ [Výsl.: $m = 6$]
   b) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x \le 4,\ x \ge y^2,\ y \ge 1/x\}$, $\varrho(x,y) = 2x$ [Výsl.: $m = 94/5$]
   c) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x + y \ge 1\}$, $\varrho(x,y) = y$ [Výsl.: $m = 1/6$]

28. a) Určete hmotnost m homogenní rovinné desky omezené křivkami $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4$ (konstantní plošná hustota ϱ). [Výsl.: $m = 8\,\varrho$]
   b) Určete těžiště tohoto tělesa. [Výsl.: Statický moment $M_y = 8\varrho/5$, těžiště $T = [1/5, 0]$]

29. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose y rovinné desky $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ 4x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$, je-li plošná hustota $\varrho(x,y) = y$. [Výsl.: $J_y = 1/60$]

Trojný integrál

V následujících sedmi úlohách

a) načrtněte množinu (těleso) D v $\mathbb{E}_3$. Zakreslete též průmět D_{xy} tělesa D do roviny $z = 0$. (Všechna daná tělesa mají dolní podstavu v rovině $z = 0$).
b) Ověřte předpoklady pro použití Fubiniovy věty. Vypočítejte trojný integrál $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
c) Uveďte alespoň dva příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment či moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu, přímce nebo rovině).

30. a) $D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ b) $f(x,y,z) = xy$

31. a) $D:\ x^2 + y^2 \le 3,\ 0 \le z \le 2$ b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

32. a) $D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le 2 - x - y$ b) $f(x,y,z) = x^2$

33. a) $D:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1,\ 0 \le z \le xy$ (stačí průmět D_{xy}) b) $f(x,y,z) = x$

34. a) $D:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1,\ 0 \le z \le 4 - x - 2y$ b) $f(x,y,z) = x^2$

35. a) $D:\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ y \ge 0$ b) $f(x,y,z) = x^2 y$

36. a) $D:\ 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3,\ 0 \le z \le xy$, (stačí průmět D_{xy}) b) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)\,z$

Výsledky: **30.** čtyřboký hranol, shora rotační paraboloid: 3/4, **31.** válec: b) 9π c) hmotnost, když $\varrho(x,y,z) = x^2 + y^2$; moment setrvačnosti J_z (vzhledem k ose z), je-li $\varrho(x,y,z) = 1$. Podobně v dalších úlohách. **32.** trojboký hranol, shora rovina: 1/5 **33.** trojboký hranol, shora hyperbolický paraboloid: 1/60 **34.** 1/4 **35.** b) 512/105 c) hmotnost, když $\varrho(x,y,z) = x^2\,y$; moment setrvačnosti J_{yz} (vzhledem k rovině yz), je-li $\varrho(x,y,z) = y$; statický moment D_{xz} (vzhledem k rovině xz), je-li $\varrho(x,y,z) = x^2$. Podobně v dalších úlohách. **36.** $3^7/10$.

Pokud je v některé z následujících úloh **výpočet objemu,** pak zvažte, zda je nutné (resp. vhodné) počítat trojný integrál, tj. $V = \int\int\int_D 1 \cdot dxdydz$ nebo zda stačí využít geometrického významu dvojného integrálu.

37. a) Načrtněte těleso $D: \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
b) Vypočítejte objem tohoto tělesa. $[V = 10/3]$
c) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = x + y$. $[m = 19/6]$

38. a) Načrtněte těleso D a jeho průmět do roviny $z = 0$, je-li D ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = 9, \ z = 0, \ z = 2$.
b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = z$. $[m = 18\pi,$ D je válec]
c) Vypočítejte hmotnost, je-li hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $[m = 36\pi]$

39. a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$, je-li D ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = 1, \ z = 0, \ z = x^2 + y^2 + 4$.
b) Vypočítejte objem tohoto tělesa. $[V = 9\pi/2,$ D je "válec", shora rotační paraboloid]

40. a) Načrtněte těleso D: $x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le z \le 4 - x$. Zakreslete jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
b) Vypočítejte objem tohoto tělesa. $[V = 16\pi,$ D je válec, shora odříznutý rovinou]

41. Vypočítejte objem tělesa D, které je omezené plochami o rovnicích $z = x^2 + y^2 + 4$, $z = 3 - x^2 - y^2, \ x^2 + y^2 = 1$. Načrtněte dané těleso a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$. $[V = 2\pi]$

42. a) Načrtněte těleso $D: \ x^2 + y^2 \le z \le 9$ a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$ (těleso ohraničené rotačním paraboloidem a rovinou).
b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$. $[m = 243\pi/2]$
c) Vypočítejte objem tohoto tělesa. $[V = 81\pi/2]$

43. a) Načrtněte těleso D a jeho průmět do roviny $z = 0$, je-li D ohraničeno plochami $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, \ z = 0, \ z = 3$.
b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = z$. $[m = 36\pi]$

44. Načrtněte těleso $D: \ x^2 + y^2 + z^2 \le 16, \ x^2 + y^2 \le 9$. Vypočítejte jeho objem. $[V = 4\pi(64 - 7\sqrt{7})/3]$

45. Je dáno těleso D. Zakreslete jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$. Vypočítejte objem tohoto tělesa.
a) D je ohraničeno plochami $3x + 2y = 12, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ z = x^2$. $[V = 32]$
b) D je ohraničeno plochami $x = y^2, \ x = 1, \ z = 0, \ z = x$. $[V = 4/5]$
c) $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ x \le 2, \ y \le 2, \ xy \ge 1, \ 0 \le z \le x^2 + y\}$. $[V = 45/8]$

46. Načrtněte daný kužel D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$. Určete hmotnost tohoto tělesa, jestliže $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 4\}$, hustota $\rho(x,y,z) = z$. $[m = 64\pi]$

47. Načrtněte daný kužel D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$. Určete hmotnost tohoto tělesa, jestliže $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ 0 \le z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$, hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $[m = 128\pi/3]$

48. Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$. Určete hmotnost tohoto tělesa, je-li $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ x^2 + y^2 \le z \le 4\}$, hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $[m = 128\pi/15]$

49. Je dáno těleso $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \ z \ge 0\}$.
a) Vypočítejte jeho hmotnost, je-li hustota $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $[m = 40\pi]$
b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. $[m = 8\pi]$

50. a) Načrtněte těleso $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \ z \ge 0\}$, $R > 0$ je konstatnta.
b) Vypočítejte hmotnost tohoto tělesa, je-li hustota $\rho(x,y,z) = z$. $[m = \pi R^4/4]$

51. Je dáno homogenní těleso $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 ; \ \sqrt{3x^2 + 3y^2} \le z \le 3\}$, hustota $\varrho = konst.$
Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
Pomocí trojného integrálu určete jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose z. $[J_z = 27\pi\varrho/10]$

52. a) Načrtněte těleso D a jeho průmět do roviny $z = 0$, je-li D ohraničeno plochami $z = x^2 + y^2, \ z = 18 - x^2 - y^2$.
b) Vypočítejte objem tohoto tělesa. $[V = 81\pi]$

53. Načrtněte těleso $D: \ 2z \ge x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 \le 3$ a určete jeho objem. $[V = 2\pi\sqrt{3} - 5\pi/3]$

54. Určete hmotnost koule o poloměru a, jestliže hustota je $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$. $[m = 8\pi a^5/15]$

55. Načrtněte těleso $D: \ 0 \le z \le 36 - 4x^2 - y^2$ a určete jeho objem. $[V = 324\pi]$