3. Extrémy funkcí dvou proměnných

V následujících úlohách
a) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém funkce n-proměnných v bodě A. Napište postačující podmínky pro lokální minimum (resp. maximum) funkce $f(x,y)$ v bodě A.
b) Vyšetřete **lokální extrémy** dané funkce f, tj. určete jejich polohu, typ a funkční hodnotu.

15. $f(x,y) = x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x$
16. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x + 6y$
17. $f(x,y) = 2y - y^2 - x\,\mathrm{e}^x$
18. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$
19. $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 8$
20. $f(x,y) = x^2 + 2x + y^4 - 4y + 7$
21. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
22. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
23. $f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x - 3y$
24. $f(x,y) = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$
25. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/2}\,(x + y^2)$
26. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$

Výsledky: **15.** $f_{\min}(-8,-2) = -16$. **16.** $f_{\min}(2,-3) = -25$, v bodě $[-2,-3]$ není extrém.
17. $f_{\max}(-1,1) = 1 + 1/\mathrm{e}$. **18.** $f_{\min}(2,2) = 2$, v bodě $[0,0]$ není extrém.
19. $f_{\min}(3,3) = -19$, v bodě $[-1,-1]$ není extrém. **20.** $f_{\min}(-1,1) = 3$. **21.** $f_{\min}(5,2) = 30$.
22. $f_{\min}(1,1/2) = 4$, v bodě $[0,0]$ není extrém.
23. $f_{\min}(1,1) = -17/2$, $f_{\max}(-4,-1) = 58$, v bodech $[1,-1]$, $[-4,1]$ není extrém.
24. $f_{\min}(4,4) = 0$.
25. $f_{\min}(-2,0) = -2/\mathrm{e}$.
26. $f_{\min}(2,-1) = 3 - 6\ln 2$, bod $[-2,1] \notin D(f)$.

27. a) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy + 3x + y + 1$.
b) Zdůvodněte existenci a najděte **absolutní extrémy** této funkce na úsečce AB, kde $A = [0,2], B = [1,1]$.
[a) lokální $f_{\min}(-1,-1) = -1$, b) $f_{\min}(1/2,3/2) = 6$, $f_{\max}(0,2) = f_{\max}(1,1) = 7$].

V následujících třech úlohách

a) Zdůvodněte **existenci absolutních extrémů** funkce f na dané množině M.
b) **Absolutní extrémy** vyšetřete, tj. stanovte jejich polohu a vypočítejte hodnotu maxima i minima funkce f na množině M.

28. $f(x,y) = x^2 + xy - 3x - y$, $M = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x + y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
[$f_{\min}(0,3) = -3$, $f_{\max}(0,0) = f_{\max}(3,0) = 0$].

29. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$, $M = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0\,\}$ (Pro vyšetření bodů na hranici můžete užít polárních souřadnic, úlohu však lze řešit i bez nich.)
[$f_{\min}(1,0) = -1$, $f_{\max}(-3,0) = 15$].

30. $f(x,y) = x + \ln x - y^2$, $M = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y = x + 1,\ 1/4 \leq x \leq 1\}$.
[$f_{\min}(1,2) = -3$, $f_{\max}(1/2,3/2) = -7/4 - \ln 2 \doteq -2{,}4$, $f(1/4,5/4) = -21/16 - \ln 4 \doteq -2{,}7$ není extrém] .

2.2. Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$

13. a) Napište a ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [-1, -2, 1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [-1, -2]$.
    b) Určete hodnoty derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[-1, -2]$. Napište gradient funkce f v bodě $[-1, -2]$.
    c) Napište rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n ke grafu funkce f v bodě A (tj. též k ploše popsané rovnicí $F(x, y, z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$).
    d) Rovnici tečné roviny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[-0.9, -2.1]$.

14. a) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ je implicitně určena funkce $z = f(x, y)$, jejíž graf prochází bodem $A = [1, 2, -1]$ a která má spojité parciální derivace 1. řádu v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 2]$.
    b) Určete hodnoty parciálních derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[1, 2]$.
    c) Určete derivaci funkce f v bodě $[1, 2]$ ve směru $\vec{u} = (-1, 2)$.
    d) Napište směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě $[1, 2]$ nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $[1, 2]$ v tomto směru $\vec{s}$.

Výsledky:

7. $F'_x(x, y) = 2xy - 3x^2$, $F'_y(x, y) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{y}}$, $f'(1) = -10$, tečna: $y = 4 - 10(x - 1)$, $f(0.8) \doteq 6$.

8.1 $F'_x(x, y) = y\,e^x - 4xy$, $F'_y(x, y) = e^x + 2y - 2x^2$, $f'(0) = -1/3$, tečna: $y = 1 - x/3$, normála: $y = 1 + 3x$, funkce f je v bodě $x_0 = 1$ klesající, sklon tečny je menší než 30^o, přesněji asi 20^o.

8.2 $F'_x(x, y) = 3x^2 - 2xy$, $F'_y(x, y) = y - x^2$, $f'(1) = 1$, tečna: $y = x + 1$, funkce f je v bodě $x_0 = 1$ rostoucí, sklon tečny je 45^o.

9. c) $f'(2) = f''(2) = -1$ d) $T_2(x) = 1 - x - (x - 2)^2/2$, $f(2.2) = -1.22$. **10.** b) $y_0 = 2$ c) $f'(1) = -9/5$, tečna: $y = 2 - \frac{9}{5}(x - 1)$ d) $f''(1) = 138/125$, f je konvexní.
11. c) $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2$, funkce f má v bodě $x_0 = 1$ lokální maximum.
12. viz [2], př. 195, $f'(1) = -3/2$.

12.1 $F'_x(x, y) = (y + xy)\,e^{x-y}$, $F'_y(x, y) = (x - xy)\,e^{x-y}$, $f'(x) = -\dfrac{y + xy}{x - xy}$, $f'(1) = 4$, tečna: $y = 2 + 4(x - 1)$, $f(1.1) \doteq 2.4$, $f''(1) = -10$.

13. a), b) viz [2], př. 187 c) $\tau : x - y - 3z + 2 = 0$,
normála $n : (x, y, z) = [-1, -2, 1] + t\,(1, -1, -3)$, $t \in \mathbb{R}$.
Pozn. Tečnou rovinu k ploše $F(x, y, z) = 0$ lze určit též užitím vztahu $\operatorname{grad} F(A) \cdot (X - A) = 0$.

14. viz [2], př. 197 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -1/5$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -11/5$ c) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2) = -21\sqrt{5}/25$
d) $\vec{s} = -\operatorname{grad} f(1, 2) = (1/5, 11/5)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1, 2) = -\sqrt{122}/5$.