1. Definiční obor, graf, izokřivky, parciální derivace, gradient, diferencovatelnost, tečná rovina, diferenciál, derivace ve směru, popis chování funkce

V úlohách 1 a 2, kromě formulovaných úkolů, nejprve určete (zapište) definiční obor $D(f)$. Dále pak pojmenujte a načrtněte v $\mathbb{E}_3$ plochu, která je grafem dané funkce. Pro lepší představu o řešené úloze si do obrázku můžete též zakreslit další vyšetřované útvary – body, vektory, případně i tečnou rovinu a normálu.

1. a) Napište postačující podmínku pro diferencovatelnost funkce n-proměnných v otevřené mn. $M \subset \mathbb{E}_n$. Určete a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu D, ve které je funkce $z = f(x,y) = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$ diferencovatelná.
   b) Vypočítejte derivaci funkce f v bodě $A = [1,-2]$ ve směru, který je určen vektorem $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, kde bod $B = [0,0]$. Popište chování funkce f v bodě A v daném směru (funkce roste, resp. klesá, jak rychle (odhad)).
   c) Napište rovnici tečné roviny a parametrické vyjádření normály ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1,-2,?]$.
   d) Napište rovnice izokřivek (tj. $f(x,y) = k$) této funkce pro $k = 0, k = 3$. Izokřivky načrtněte.

2. a) Napište (a <u>zdůvodněte</u>), ve kterých bodech $[x,y] \in \mathbb{E}_2$ je funkce $z = f(x,y) = -\sqrt{5y - x^2}$ diferencovatelná. Množinu těchto bodů načrtněte.
   b) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu dané funkce v bodě $A = [4,5]$. Popište chování dané funkce v bodě A (funkce roste, resp. klesá, v jakém směru a odhadněte, jak rychle).

c) Určete směr $\vec{s}$, ve kterém funkce f v bodě A nejrychleji klesá. Vypočítejte derivaci funkce f v bodě A v tomto směru $\vec{s}$.

d) Napište diferenciál funkce f v bodě $A = [4, 5]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $[4.3, 5.3]$.

3. a) Určete (se zdůvodněním) a načrtněte v $\mathbb{E}_2$ množinu, ve které je funkce $z = f(x,y) = \ln(xy - 4)$ diferencovatelná.
   b) Určete gradient této funkce f v bodě $A = [-2, -4]$. Popište, co vypočtený vektor udává. Určete velikost derivace zadané funkce v bodě A ve směru gradientu.
   c) Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je derivace dané funkce v bodě A nulová. Nulovou hodnotu derivace ověřte výpočtem.
   d) Napište rovnice izokřivek této funkce pro $k = 0$ a pro $k = \ln 4$. Izokřivky načrtněte (tj. křivky $f(x,y) = k$).

4. Další varianty úloh č. 1 až 3 s jinou funkcí f a jiným bodem A.
   Úlohy 4.7 až 4.11 řešte bez izokřivek, úlohy 4.4 až 4.11 bez grafu.

4.1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$ $\quad A = [-7, 1]$

4.2. $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad A = [-3, 4]$

4.3. $f(x,y) = \sqrt{x - y^2 + 2}$ $\quad A = [3, -1]$

4.4. $f(x,y) = \ln(3x - y + 2)$ $\quad A = [-1, -2]$

4.5. $f(x,y) = \dfrac{3x - 2y}{y}$ $\quad A = [-1, 2]$

4.6. $f(x,y) = \ln(xy^2)$ $\quad A = [2, -1]$

4.7. $f(x,y) = \cos x + \dfrac{1}{2}\sin y - 3$ $\quad A = [0, \pi/2]$

4.8. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} - x\sqrt{y}$ $\quad A = [4, 1]$

4.9. $f(x,y) = (x^2 + y)\,\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad A = [0, 1]$

4.10. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad A = [1, 1]$

4.11. $f(x,y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2 + y^2 - 20}$ $\quad A = [-2, -5]$

5. a) Vypočítejte derivaci funkce $f(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$ v bodě $A = [-1, 2]$ ve směru určeném vektorem $\vec{s} = (2, -2)$. Je to směr maximálního růstu funkce f v bodě A? Zdůvodněte !
   b) Určete všechny body, v nichž je gradient funkce f roven nulovému vektoru.
   c) Najděte dotykový bod a rovnici tečné roviny τ ke grafu funkce f rovnoběžné s rovinou $\varrho:\ 4x + 6y - z + 3 = 0$.

6. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $z = f(x,y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$.
   b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 1, ?]$. Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $[0.9, 1.1]$.
   c) Dokažte, že daná funkce vyhovuje pro všechna $[x,y] \in \mathbb{E}_2$ diferenciální rovnici
   $$y^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = 2xz.$$

6.1. Varianta úlohy c): Ověřte, že funkce $u(x,t) = \sin(x - ct)$ a funkce $u(x,t) = \sin\omega ct \cdot \sin\omega x$ vyhovují diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (tzv. vlnová rovnice).

6.2. Varianta úlohy c): Ověřte, že funkce $u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ vyhovuje diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Laplaceova rovnice).

Výsledky:

1. Graf: "horní" část (tj. $z \geq 0$) elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$

a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 18 - x^2 - 2y^2 > 0\}$, tj. vnitřek elipsy se středem v počátku, poloosy: $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$, v množině D má daná funkce spojité parciální derivace

b) $\mathrm{grad} f(A) = (-1/3, 4/3)$, $\vec{s} = (-1, 2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 3\sqrt{5}/5$, daná funkce v bodě A v daném směru roste, a to se sklonem asi $50°$

c) $\tau : z = 3 - (x-1)/3 + 4(y+2)/3$, po úpravě: $x - 4y + 3z = 18$,
normála $n : (x, y, z) = [1, -2, 3] + t\,(1, -4, 3)$, $t \in \mathbb{R}$

d) Izokřivky (vrstevnice) jsou elipsy: $x^2 + 2y^2 = 18$ (hranice $D(f)$, pro k=0),
resp. $x^2 + 2y^2 = 9$ (pro $k = 3$).

2. Graf: "dolní" část ($z \leq 0$) rotačního paraboloidu $y = (x^2 + z^2)/5$, osa v ose y.

a) V bodech $[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 5y - x^2 > 0$, tj. vnitřek paraboly s vrcholem v počátku a osou v ose y, v těchto bodech má daná funkce spojité parciální derivace.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 4/3$, daná funkce v bodě A v kladném směru osy x roste, a to se sklonem asi $50° - 55°$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = -5/6$, daná funkce v bodě A v kladném směru osy y klesá, a to se sklonem asi $40°$.

c) $\vec{s} = -\mathrm{grad} f(A) = (-4/3, 5/6)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = -\|\mathrm{grad} f(A)\| = -\sqrt{89}/6 \doteq -1.6$, tedy pokles se sklonem téměř $60°$ d) $df(A) = \frac{4}{3}\,dx - \frac{5}{6}\,dy$, $f(4.3,\,5.3) \doteq f(A) + \frac{4}{3}\,0.3 - \frac{5}{6}\,0.3 = -2.85$.

3. a) $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : xy - 4 > 0\}$, v množině D má daná funkce spojité parciální derivace.
D je otevřená množina ohraničená křivkou $y = 4/x$, $D = D_1 \cup D_2$ (množina v 1. a 3. kvadrantu)

b) $\mathrm{grad} f(A) = (-1, -1/2)$ udává směr maximálního růstu dané funkce v bodě A c) $\vec{s} \perp \mathrm{grad} f(A)$, např. $\vec{s} = (1/2, -1)$

d) $C_1 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : \ln(xy-4) = 0\}$, tj. křivka $y = 5/x$, $C_2 = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : \ln(xy-4) = \ln 4\}$, tj. křivka $y = 8/x$.

4.1. Graf: "horní" část ($z \geq 0$) dvoudílného hyperboloidu $x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$, vrcholy v bodech $[6, 0, 0]$, $[-6, 0, 0]$.

4.2. Graf: "dolní" část rotační kuželové plochy, osa v ose z, vrchol v bodě $[0, 0, 4]$.

4.3. Graf: "horní" část ($z \geq 0$) rotačního paraboloidu $x = y^2 + z^2 - 2$, osa v ose x, vrchol $[-2, 0, 0]$.

5. a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 11\sqrt{2}$. Není to směr maximálního růstu dané funkce v bodě A, tím je směr (vektor) $\mathrm{grad} f(A) = (12, -10)$ b) $x = -1/10$, $y = -3/10$

c) viz [2], př. 140: $T = [1, 0, 3]$, $4x + 6y - z - 1 = 0$.

6. a) $f'_x(x,y) = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2)$, $f'_y(x,y) = 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)$.
b) $z = 2x - 2y$, $f(0.9,\,1.1) \doteq -0.4$.

2. Implicitní funkce

2.1. Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

7. a) Vypočítejte parciální derivace 1. řádu funkce $F(x,y) = x^2y - x^3 - 2 \cdot \sqrt{y} + 1$.
   b) Ověřte, že rovnicí $F(x,y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0] = [1, 4]$ implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci $f'(x)$.
   c) Určete hodnotu derivace $f'(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $[1, 4]$.
   d) Rovnici tečny užijte k přibližnému výpočtu hodnoty $y = f(x)$ v bodě $x = 0.8$.

8. Další varianty této úlohy s jinou funkcí F a bodem $[x_0, y_0]$:

   8.1. $F(x,y) = y\,\mathrm{e}^x + y^2 - 2x^2y - 2$, $[x_0, y_0] = [0, 1]$; výpočet $f'(0)$, rovnice tečny a rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[0, 1]$, popis chování této funkce v bodě $x_0 = 0$, tj. rostoucí, resp. klesající, jak rychle (odhad).

   8.2. $F(x,y) = x^3 + \dfrac{y^2}{2} - x^2y - 1$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$; výpočet $f'(1)$, rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[1, 2]$, popis chování této funkce v bodě $x_0 = 1$. Pokud víte, že $f''(1) = 1$, načrtněte do jednoho obrázku tečnu a tvar grafu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$.

   Následující čtyři úlohy mají společnou část

   a) Napište **postačující** podmínky pro existenci spojité funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a pro spojitost její derivace $f'(x)$ v okolí bodu $x = x_0$.

9. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4 - 1 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0] = [2, -1]$ a která má spojitou 1. a 2. derivaci v okolí bodu $x_0 = 2$.
   c) Určete hodnoty derivací $f'(2)$ a $f''(2)$.
   d) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 2$. Pomocí $T_2(x)$ pak vypočítejte přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 2.2$.

10. b) Ověřte (všechny předpoklady), že rovnicí $F(x,y) = x^3 + xy^2 + xy - 7 = 0$ je v okolí bodu $x_0 = 1$ definována diferencovatelná **kladná** funkce $y = f(x)$. Určete hodnotu $y_0 = f(x_0)$.
   c) Vypočtěte hodnotu derivace $f'(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.
   d) Zjistěte, zda je funkce f konvexní nebo konkávní v okolí bodu $x_0 = 1$. Načrtněte tvar grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

11. b) Ověřte, že rovnicí $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je implicitně určena diferencovatelná funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0, y_0] = [1, 1]$.
   c) Vyšetřete, zda funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0 = 1$ lokální extrém. Pokud ano, určete, zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. (Zdůvodněte.)

12. b) Ověřte, že rovnicí $F(x,y) = \ln(x+y) + 2x + y = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, která má spojitou derivaci v okolí bodu $x_0 = -1$ a splňuje podmínku $f(-1) = 2$.
   c) Určete hodnotu derivace $f'(-1)$. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[-1, 2]$.
   d) Rovnici tečny užijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = -0.9$.
   12.1. Varianta předcházející úlohy: $F(x,y) = xy\mathrm{e}^{x-y} - \frac{2}{\mathrm{e}} = 0$, $x_0 = 1$, $f(1) = 2$, tečna ke grafu funkce f v bodě $[1, 2]$, výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1.1$, výpočet hodnoty 2. derivace $f''(1)$.