Aplikovaná matematika

1. Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 2xy - x^2 - 3y^2 + 4y$ na úsečce $M = \{ [x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; y = 1 - x,\; -1 \le x \le 1\}$.

2. Je dána funkce $f(x) = \ln(2x+1) - \dfrac{x}{2}$.

   a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.

   b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/2$.

   c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Pomocí $R_3(1/2)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/2)$ z úlohy b).

3. a) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -13, & -1, & 0 \\ 4, & -8, & -2 \end{pmatrix}$.

   b) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A.

   c) Zvolte jedno z vlastních čísel. Napište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů a ty pak určete.

4. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x,y,z] \in E_3 \,;\; z = 4 - x^2 - y^2,\; z \ge 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q při této parametrizaci.

   b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (y, -x, z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ ostrý úhel.

   c) Vypočítejte tok tohoto vektorového pole $\vec{f}$ plochou σ, která je vně orientovaným povrchem tělesa $M = \{[x,y,z] \in E_3 \,;\; 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$. (K výpočtu lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu).

5. a) Určete fundamentální systém a napište obecné řešení homogenní diferenciální rovnice 2. řádu $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.

   b) Užitím metody odhadu napište tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = \mathrm{e}^{2t} + \cos t$. Partikulární řešení určete.

   c) Napište obecné řešení nehomogenní rovnice z úlohy b).

6. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = -2x(y+1)$.

   a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.

   b) Určete implicitní tvar fázových trajektorií dané soustavy. Napište rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem $M = [1,0]$.

   c) Určete všechny body rovnováhy zadané soustavy.

Další podobné úlohy lze nalézt např. v následujících textech:

[1] S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2017 (též 2014).

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová, F. Mráz: Sbírka příkladů z Matematiky II. Webové stránky Ústavu technické matematiky, předmět Matematika II, http://mat.fs.cvut.cz/.

[3] S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky III. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.

Aplikovaná matematika, výsledky

1. Daná množina M (úsečka) je uzavřená a omezená. Zadaná funkce je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_2$, tedy je spojitá též na mn. $M \subset \mathbb{E}_2$. Tím je zaručena existence absolutních extrémů, tj. největší i nejmenší hodnoty dané funkce na dané úsečce. Vyjádření úsečky, tj. $y = 1 - x$ dosadíme do $f(x, y)$, čímž získáme funkci φ jedné proměnné x: $\varphi(x) = f(x, 1-x) = -6x^2 + 4x + 1$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Jedná se o spojitou funkci na omezeném uzavřeném intervalu. Ta nabývá absolutních extrémů, a to v některém z tzv. kritických bodů. Mezi ně patří krajní body a dále vnitřní body, v nichž je derivace nulová nebo neexistuje.

Ve všech vnitřních bodech intervalu $\langle -1, 1\rangle$ má funkce φ derivaci $\varphi'(x) = -12x + 4$.
Rovnice $\varphi'(x) = 0$ má jediný kořen $x = 1/3$. Spolu s krajními body intervalu $\langle -1, 1\rangle$ tak máme pouze tři body, ve kterých daná funkce může nabývat absolutního maxima, resp. minima. Pro zadanou úlohu funkce dvou proměnných ještě v každém získaném bodě dopočítáme odpovídající hodnotu y. Pak už stačí vypočítat funkční hodnoty $f(x, y)$ v těchto bodech: $f(-1; 2) = -9$, $f(1; 0) = -1$, $f(1/3; 2/3) = 5/3$.
Závěr: Na dané úsečce je $\max f = f(1/3; 2/3) = 5/3$, $\min f = f(-1; 2) = -9$.

2. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{2}$, $f''(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$, tečna: $y = \dfrac{3}{2}\,x$, b) $T_2(x) = \dfrac{3}{2}\,x - 2\,x^2$,
$f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 1/4$, $f'''(x) = \dfrac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x) = \dfrac{8}{3\,(2\,\xi + 1)^3}\,x^3$, ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x,
$|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \leq 1/3$.

3. a) $\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\,\lambda + 10)$, vlastní číslo $\lambda_1 = -2$, dvě komplexní vlastní čísla: $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3\mathrm{i}$, $\rho(A) = \sqrt{10}$; pro λ_1 jsou vlastní vektory $X = p\,(0, 0, 1)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$.

4. a) a b) viz [2], řešený příklad 557: Při parametrizaci $z = 4 - x^2 - y^2$, kde $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 4$ je kolmý vektor $\vec{n} = (2x, 2y, 1)$. Hledaný tok, tj. plošný integrál $\iint_Q \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$ je pak dán hodnotou dvojného integrálu
$\iint_B (y, -x, z)\cdot(2x, 2y, 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B (4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Ten vypočteme pomocí polárních souřadnic s výsledkem $8\,\pi$. Poznámka: Celý výpočet lze případně provést parametrizací dané plochy pomocí cylindrických souřadnic.
c) K výpočtu lze užít Gaussovu větu, jejíž předpoklady jsou splněny. Potom hledaný tok, tj. plošný integrál $\iint_\sigma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$ je roven trojnému integrálu $\iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, neboť $\operatorname{div} \vec{f} = 1$. Výsledek $8\,\pi$ může být získán též bez Gaussovy věty, tj. výpočtem integrálu $\iint_\sigma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$ jako součtu $\iint_Q \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p} + \iint_P \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{p} = 8\,\pi + 0 = 8\,\pi$, kde plocha $P : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, tj. kruh v rovině $z = 0$.

5. viz [3], řešený příklad 2.14: a) Fundamentální systém tvoří funkce $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t$, $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin t$. Obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\,\mathrm{e}^{2t}\sin t$, $t \in \mathbb{R}$. b) Odhad partikulárního řešení je $x_p = A\mathrm{e}^{2t} + B\cos t + C\sin t$. Partikulární řešení je potom $x_p(t) = \mathrm{e}^{2t} + \dfrac{1}{8}\cos t - \dfrac{1}{8}\sin t$. c) Obecné řešení $x(t) = x_h(t) + x_p(t), t \in \mathbb{R}$.

6. viz [3], řešený příklad 4.5: a) Jacobiova matice je spojitá v $\mathbb{E}_2$.
b) $x^2(y+1) - \dfrac{y^3}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$, $x^2(y+1) - \dfrac{y^3}{3} = 1$, c) $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[-1, -1]$.