Vybrané příklady ze skript

J. Neustupa, S. Kračmar: **Sbírka příkladů z Matematiky I (2011)**

I. LINEÁRNÍ ALGEBRA

I.1. Vektory, vektorové prostory

Jsou zadány vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ a reálná čísla α, β, γ. Vypočítejte vektor $\mathbf{a}$, který je roven lineární kombinaci $\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v} + \gamma\,\mathbf{w}$.

2. $\mathbf{u} = (4, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (5, 3, 2)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, -1)$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

Najděte vektor $\mathbf{x}$, který vyhovuje zadané rovnici.

8. $7\,\mathbf{x} + \mathbf{u} = 3\mathbf{u} + 6\mathbf{v} - \mathbf{x}$, kde $\mathbf{u} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 3, 5)$

Vypočítejte skalární součin zadaných vektorů. (`Návod:` *Užijte formuli* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.)

15. $\mathbf{u} = (3, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$

Vypočítejte, jaký úhel svírají zadané vektory. (`Návod:` *Užijte formuli* $\cos\vartheta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)$.)

22. $\mathbf{u} = (-1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 2)$

Pro jakou hodnotu parametru α jsou zadané vektory kolmé? (`Návod:` *Vektory jsou kolmé, je-li jejich skalární součin roven nule.*)

25. $\mathbf{u} = (-2, \alpha + 3)$, $\mathbf{v} = (0, -1 + 2\alpha)$

V následujících příkladech jsou dány vektory z $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ až $\mathbf{V}(\mathbb{E}_4)$. Zjistěte a) zda jsou tyto vektory lineárně závislé nebo lineárně nezávislé, b) jaká je dimenze vektorového prostoru, který je danými vektory generován a c) které vektory tvoří bázi tohoto vektorového prostoru.
Rozmyslete si skutečnost, že otázku b) by bylo možné také formulovat takto: Jaká je hodnost matice, jejíž řádky (nebo sloupce) jsou tvořeny danými vektory?

42. $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 3)$

43. $\mathbf{u} = (-1, 1)$, $\mathbf{v} = (10, -10)$

44. $\mathbf{u} = (1, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$

45. $\mathbf{u} = (-1, 5, 1)$, $\mathbf{v} = (3, -15, -3)$

50. $\mathbf{x} = (1, 5)$, $\mathbf{y} = (0, 0)$, $\mathbf{z} = (5, 25)$

51. $\mathbf{x} = (2, 3, -2)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 1)$, $\mathbf{z} = (0, 9, -8)$

53. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, -2)$, $\mathbf{y} = (3, -2, 5, 2)$, $\mathbf{z} = (4, -6, 5, 20)$

V následujících příkladech jsou dány vektory z $\mathbf{V}(\mathbb{E}_2)$ až $\mathbf{V}(\mathbb{E}_4)$, v jejichž souřadnicích se vyskytují parametry. Zjistěte a) pro které hodnoty parametrů jsou tyto vektory lineárně závislé a b) jaká je v těchto případech dimenze vektorového prostoru, který je danými vektory generován. (`Návod:` *Utvořte matici, jejíž řádky jsou tvořeny zadanými vektory. V závislosti na vyskytujících se parametrech vyšetřete hodnost matice.*)

68. $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{c} = (\alpha, 0, \alpha + 1)$, $\mathbf{d} = (\alpha - 1, \alpha, 0)$

69. $\mathbf{u} = (k, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, k - 1, 3)$, $\mathbf{w} = (0, 2, k)$

70. $\mathbf{u} = (0, 1, a)$, $\mathbf{v} = (2, a, a)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$

Vyjádřete vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (respektive $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$) (pokud to jde). Je vyjádření jednoznačné? (`Návod:` *Vektor* $\mathbf{a}$ *hledejte ve tvaru* $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. *Rozepište toto vyjádření do souřadnic. Obdržíte soustavu rovnic pro neznámé* α *a* β.)

73. $\mathbf{a} = (3, 2, 5)$, $\mathbf{b} = (5, 6, 7)$, $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{w} = (5, 1, 8)$

a) Tvoří následující vektory bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$? b) Jaká je dimenze vektorového prostoru, který je danými vektory generován ?

Rozmyslete si skutečnost, že otázku b) by bylo možné formulovat také takto: Jaká je hodnost matice, jejíž řádky (nebo sloupce) jsou tvořeny danými vektory ?

79. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_3),\ \mathbf{a} = (0, 7, 3),\ \mathbf{b} = (5, 3, 2)$

V následujících příkladech je zadán vektorový prostor $\mathbf{V}$ a jeho podmnožina $\mathbf{V}'$. Rozhodněte, zda $\mathbf{V}'$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

85. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_3),\quad \mathbf{V}' = \{(a, b, c);\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a + b = 0\}$

92. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbb{E}_4),\quad \mathbf{V}' = \{(u, v, w, x);\ u, v, w, x \in \mathbb{R},\ u - 2v + w \geq 0\}$

V následujících příkladech je $\mathbf{V}$ množinou, jejímiž prvky jsou funkce definované na intervalu I. Součet $f+g$ libovolných dvou funkcí f a g z $\mathbf{V}$ je definován takto: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pro $x \in I$. Součin $\lambda \cdot f$ libovolného reálného čísla λ a libovolné funkce f z $\mathbf{V}$ je definován takto: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pro $x \in I$. Ověřte, zda množina $\mathbf{V}$ (spolu s uvedenými operacemi) je vektorovým prostorem.

93. $I = (-\infty, +\infty)$, $\mathbf{V}$ je množina všech funkcí, které mají tvar $\alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x + \gamma$ kde $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

94. $I = (-\infty, +\infty)$, $\mathbf{V}$ je množina všech funkcí, které mají tvar $\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ kde $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

I.2. Matice, determinanty

Vypočítejte matici $A \cdot B$.

109. $A = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 3 \\ 0, & 5, & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 2, & 4 \\ 0, & 3, & 1, & 0 \\ 5, & 2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ **110.** $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = (\,1, \quad 2, \quad 1\,)$

111. $A = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 4, & 2 \\ -2, & 3, & -1, & 2 \\ 4, & 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 2, & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **112.** $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$

Proveďte naznačené operace.

117. $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}^3$ **124.** $\begin{pmatrix} 2, & 1, & -1 \\ -1, & 2, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, & 1, & -1 \\ -1, & 2, & 0 \end{pmatrix}^T$

V následujících příkladech vypočítejte matici $A \cdot B - B \cdot A$.

132. $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 2 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4, & 1, & 1 \\ -4, & 2, & 0 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ **133.** $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 2 \\ -1, & 2, & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 2 \\ 3, & 2, & 4 \\ -3, & 5, & 1 \end{pmatrix}$

Nalezněte $x,\ y \in \mathbb{R}$ taková, aby platila rovnice

139. $\begin{pmatrix} 1, & 3x - 2 \\ 3y + 6, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 12 \\ 40, & 2 \end{pmatrix}^T$ **140.** $\begin{pmatrix} x + y, & -3 \\ -2, & x - y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix} \right]^T$

Určete hodnost zadané matice. Je-li matice čtvercová, rozhodněte, zda je regulární či singulární.

143. $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & -1, & 1 \\ 1, & 7, & 7 \end{pmatrix}$ **148.** $\begin{pmatrix} 1, & -2, & 3 \\ -3, & -6, & -9 \\ 4, & 8, & 12 \end{pmatrix}$ **149.** $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 2 \\ 2, & -4, & 4, & 1 \\ -1, & -19, & 5, & 0 \\ 3, & 15, & -1, & 2 \end{pmatrix}$

K zadaným maticím spočítejte inverzní matice (pokud existují).

160. $\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 2 \end{pmatrix}$ **161.** $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 1 \end{pmatrix}$ **166.** $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \\ 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}$

168. $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 3 \\ 1, & -1, & 0 \\ -1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ **170.** $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ **171.** $\begin{pmatrix} \cos x, & -\sin x \\ \sin x, & \cos x \end{pmatrix}$

Nalezněte matici X, pro kterou platí

174. $X \cdot \begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 1, & -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 3 \\ 4, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 5 \end{pmatrix}$ **175.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 0, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$

176. $A = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$. Určete matici X, pro kterou platí $A \cdot X = (A - B)^2$.

177. Řešte maticovou rovnici $A \cdot X \cdot B = C$, kde $A = \begin{pmatrix} 3, & 1 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}$.

178. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} x, & 1 + x^2, & 1 \\ y, & 1 + y^2, & 1 \\ z, & 1 + z^2, & 1 \end{pmatrix}$.

Pro jaká $x, y, z \in \mathbf{R}$ je matice A regulární? Vypočítejte A^{-1} pro $x = 0, y = 1, z = 2$.

Vypočítejte následující determinanty.

180. $\begin{vmatrix} \cos x, & \sin x \\ \sin x, & \cos x \end{vmatrix}$ **185.** $\begin{vmatrix} 2, & 5, & 0 \\ -1, & 7, & 1 \\ 4, & 1, & -4 \end{vmatrix}$ **190.** $\begin{vmatrix} a, & a, & a \\ -a, & a, & x \\ -a, & -a, & x \end{vmatrix}$ **200.** $\begin{vmatrix} 1, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 1 \\ a, & b, & 0, & 0 \\ -1, & -1, & 1, & 0 \end{vmatrix}$

I.4. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic

Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory těchto matic.

235. $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ **236.** $\begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$ **237.** $\begin{pmatrix} 0, & a \\ -a, & 0 \end{pmatrix}$ **238.** $\begin{pmatrix} 5, & 6, & -3 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$

241. $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ **243.** $\begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -4, & -1, & 0 \\ 4, & -8, & -2 \end{pmatrix}$ **244.** $\begin{pmatrix} 2, & 5, & -6 \\ 4, & 6, & -9 \\ 3, & 6, & -8 \end{pmatrix}$

V následujících příkladech předpokládáme, že A je čtvercová matice typu 3×3, jejímiž prvky jsou reálná čísla. Rozhodněte, zda je možné, aby matice A měla uvedená vlastní čísla a případně též uvedené odpovídající vlastní vektory.

245. vlastní čísla: $2,\ 1,\ 2 + \mathrm{i}$

246. vlastní čísla: $2,\ 1 + \mathrm{i},\ 1 - \mathrm{i}$, vlastní vektory: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Vypočítejte inverzní matici k matici A a najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory inverzní matice A^{-1}. Porovnejte výsledky s vlastními čísly a vlastními vektory matice A.

250. $A = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ **251.** $A = \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$ **252.** $A = \begin{pmatrix} 0, & 5 \\ -5, & 0 \end{pmatrix}$ **253.** $A = \begin{pmatrix} 5, & 6, & -3 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$

K zadané čtvercové matici A vypočítejte matici A^2 a najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A^2. Porovnejte výsledky s vlastními čísly a vlastními vektory matice A.

255. $A = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ **256.** $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 3, & 2 \end{pmatrix}$ **257.** $A = \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ -2, & 0 \end{pmatrix}$ **258.** $A = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 2 \\ 5, & -3, & 3 \\ -1, & 0, & -2 \end{pmatrix}$

I.5. Soustavy lineárních algebraických rovnic

Pomocí Frobeniovy věty rozhodněte, zda následující soustavy rovnic mají řešení a jaký je jejich počet.

273. $$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 2x - y &= 0 \\ 4x - 5y &= -6 \end{aligned}$$

275. $$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= -9 \\ 3x + 5y + 4z &= 10 \\ 5x + 12y + 6z &= 29 \end{aligned}$$

276. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ 5x + 4y + z &= 27 \\ x + 2y + 5z &= 33 \end{aligned}$$

Pomocí Frobeniovy věty vyšetřete, kolik řešení mají v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů následující soustavy.

278. $$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

280. $$\begin{aligned} ax - 3y &= 1 \\ ax - 2y &= 2 \end{aligned}$$

283. $$\begin{aligned} 2x - y + z + u &= 1 \\ x + 2y - z + 4u &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11u &= \lambda \end{aligned}$$

Ověřte, zda je možné použít při řešení následujících soustav rovnic Cramerovo pravidlo. V kladném případě soustavu pomocí tohoto pravidla řešte. (`Návod:` *Cramerovo pravidlo lze použít, je-li matice soustavy regulární.*)

287. $$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 11 \\ x + y - 3z &= 7 \\ 11x - 4y - 3z &= 10 \end{aligned}$$

288. $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12 \end{aligned}$$

295. $$\begin{aligned} -5x + y - 2z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Vyšetřete, jaká je v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů dimenze vektorového prostoru všech řešení následujících homogenních soustav lineárních algebraických rovnic.

300. $$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ \lambda x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

301. $$\begin{aligned} 4x + 2y - 2z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \\ \lambda x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

Řešte Gaussovou eliminační metodou homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic.

308. $$\begin{aligned} 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 2y - 5z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

309. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

310. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

316. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

317. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešte eliminační metodou následující nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic.

324. $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x + 3y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

328. $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

332. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_2 - 3x_3 &= -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

337.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

338.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Řešte následující soustavy lineárních algebraických rovnic s parametry.

348.
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + 4y + z &= 4 \end{aligned}$$

349.
$$\begin{aligned} ax - 2y + z &= 1 \\ x - 2ay + z &= -2 \\ x - 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

350.
$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 2\alpha + 1 \\ x + \alpha y + z &= 2 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

Kolik řešení (v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů) mají následující soustavy lineárních algebraických rovnic? Pro zadané hodnoty parametrů soustavy vyřešte. (`Návod:` *Užijte Frobeniovu větu.*)

359.
$$\begin{aligned} (2a-1)x + (a+1)y + z &= 1 - a \\ x - y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$
$[\,a = 1\,]$

360.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= k \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$
$[\,k = 5\,]$

369. Určete všechny hodnoty parametru λ, pro něž má soustava $A \cdot X = O$ nenulové řešení a vypočítejte toto řešení. Matice A má tvar: $A = \begin{pmatrix} \lambda, & 4, & 7 \\ 3, & -4, & 5 \\ 1, & \lambda, & 4 \end{pmatrix}$

(`Návod:` *Hledané hodnoty λ jsou ty hodnoty, pro které je matice A singulární a její determinant je tudíž roven nule.*)

370. Cramerovým pravidlem řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= -1 \\ 4x - 4y - z &= 3 \\ 8x \phantom{{}+3y} - 9z &= 0. \end{aligned}$$

III. DIFERENCIÁLNÍ POČET

III.1. Posloupnosti reálných čísel

O následujících posloupnostech rozhodněte, zda jsou rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, monotnní, ryze monotnní, omezené zdola, omezené shora, omezené, neomezené. (Předpokládáme, že $n = 1, 2, 3, \ldots$)

575. $\left\{ 2 + 3^n \right\}$

577. $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$

578. $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} \right\}$

579. $\left\{ \dfrac{1 + (-1)^n}{2} \right\}$

580. $\left\{ -\dfrac{n^2}{n+1} \right\}$

581. $\left\{ \dfrac{n+5}{n+2} \right\}$

Vypočítejte následující limity.

591. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)$

594. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 - 2n + 1}$

596. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n + 2}$

599. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 - 3n^2 + 5n - 1}{4n^2 + n - 2}$

609. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$

612. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n-1)^2 - 4n + 1}{n^2 - (n+5)^2}$

618. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n\right)$

619. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

620. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+5}\right)$

621. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$

622. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$

623. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$

629. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$

637. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\sin n}{n+1}$

638. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\cos(n!)}{2n+1}$

639. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{n+1}$

642. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

648. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$

651. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$

654. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+(-2)^n}{2\cdot 4^n}$

III.2. Funkce – základní pojmy a vlastnosti

Stanovte definiční obory následujících funkcí. (`Návod:` *Pokud definiční obor není explicitně zadán, je jím množina všech x, pro která má výraz, jímž je funkce definovaná, smysl.*)

657. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$

660. $y=\ln(x+3)+\sqrt{5-2x}$

661. $y=\arcsin\dfrac{1-2x}{4}$

664. $y=\ln(x^2-1)$

667. $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x^2-7x+6}$

668. $y=\sqrt{\ln(x^2-3x+2)}$

Jsou dány funkce f_1 a f_2. Sestavte složené funkce $g=f_1*f_2$ a $h=f_2*f_1$.

674. $f_1(x)=x^2,\quad f_2(x)=\sin x$

675. $f_1(x)=\ln(x+1),\quad f_2(x)=5x^2+2$

678. $f_1(x)=x^2+5x,\quad f_2(x)=\sin(2x+1)$

679. $f_1(x)=\cos(x+1),\quad f_2(x)=x+2$

Které z následujících funkcí jsou sudé a které liché?

687. $y=x^3+x\cdot\cos x$

694. $y=\dfrac{x^2-1}{x+x^3}$

695. $y=\cos x+\cos(2x)$

Které z následujících funkcí jsou periodické a s jakou periodou?

698. $y=\sin x+\cos(2x)$

704. $y=|x+2|$

707. $y=|\cos^2(x/2)|$

Na základě znalosti grafů elementárních funkcí nakreslete grafy následujících funkcí.

709. $y=\sin(2x)$

718. $y=\arcsin(x-5)$

723. $y=\sqrt{x+4}$

727. $y=|x|+2$

733. $y=\ln|x|$

734. $y=\ln|x-5|$

III.3. Limita a spojitost funkce

Je dána funkce f a kladné číslo ε. Vypočítejte hodnotu L limity $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ a najděte reálné číslo a takové, že pro všechna $x\in(a,+\infty)$ je $f(x)\in U_\varepsilon(L)$. (`Návod:` *Užijte definici limity funkce.*)

767. $f(x)=\dfrac{1}{x+1},\ \varepsilon=0.01$

768. $f(x)=5+\mathrm{e}^{-x},\ \varepsilon=0.1$

Vypočítejte následující limity (pokud existují).

791. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3-3x+1}{x-4}$

792. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$

796. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right)$

797. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+1}$

807. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

816. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

837. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(5x)}{3x}$ **839.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ **840.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$

859. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$ **863.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin \dfrac{1}{x}$ **864.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$

865. $\lim\limits_{x\to +\infty} \arcsin \dfrac{x}{x+1}$ **866.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ **869.** $\lim\limits_{x\to -\infty} x\cdot \mathrm{e}^x$

882. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\sin(2x)-\sin x}$ **887.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ **891.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

Vypočítejte následující jednostranné limity.

902. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x+2}{x-1}$ **904.** $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot \ln x$ **909.** $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{5+x}{x(x-1)}$

Limity, které jsou uvedené v následujících příkladech, neexistují. Zdůvodněte, proč tomu tak je.

921. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ **924.** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ **926.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$

V jakých maximálních intervalech jsou následující funkce spojité?

929. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ **931.** $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$ **932.** $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$

937. $y=\mathrm{e}^{x+1/x}$ **939.** $y=\dfrac{1}{\ln x}$ **943.** $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$

III.4. Derivace funkce a její geometrický i fyzikální význam

Vypočítejte derivace následujících funkcí. Určete také, pro jaká x je derivace definovaná.

a) Polynomy, racionální funkce, jejich mocniny a odmocniny.

960. $y=5x^2+7x-2$ **968.** $y=\sqrt{2x^2-x+5}$ **972.** $y=(x+6)\sqrt{x-1}$

976. $y=\dfrac{x^2+3}{x+5}$ **979.** $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{5-x}}$ **980.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

b) Goniometrické funkce a pomocí nich vytvořené složené funkce.

990. $y=\sin(3x)$ **991.** $y=\cos x^2$ **993.** $y=\sin^2(6x)$

999. $y=\sin(x^2+2x+2)$ **1001.** $y=x^2\cdot \operatorname{tg} x$ **1003.** $y=\sqrt{1+x+\sin x}$

c) Cyklometrické funkce a pomocí nich vytvořené složené funkce.

1008. $y=\arcsin\sqrt{x+1}$ **1009.** $y=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **1016.** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

d) Exponenciální a logaritmické funkce a složené funkce, které jsou z nich vytvořené.

1017. $y=\mathrm{e}^{2x}$ **1018.** $y=\mathrm{e}^{5x^2-2x+1}$ **1020.** $y=\sqrt{\mathrm{e}^x}$

1021. $y=(\mathrm{e}^{5x}+1)^2$ **1027.** $y=\ln(x^2+3x+4)$ **1028.** $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

e) Různé další funkce.

1047. $y=\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right)$ **1049.** $y=\mathrm{e}^{2x}\cdot(x^2+1)^2$ **1051.** $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Najděte derivaci dané funkce f a nakreslete graf funkce f i její derivace f'. (`Návod:` *Uvědomte si, že* $|x|=x$ *pro* $x>0$, $|x|=-x$ *pro* $x<0$ *a funkce* $|x|$ *nemá derivaci v bodě* $x=0$.)

1055. $f(x) = |x|$ **1056.** $f(x) = \ln|x|$ **1057.** $f(x) = x \cdot |x|$

Vypočítejte $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$. (`Návod:` *Pokud existuje limita zprava* $\lim_{x\to x_0+} f'(x)$, *má funkce* f *v bodě* x_0 *derivaci zprava* $f_+(x_0)$ *rovnou této limitě. Stejné tvrzení platí o derivaci zleva.*)

1058. $f(x) = |x|,\quad x_0 = 0$ **1062.** $f(x) = |4x - x^2|,\quad x_0 = 4$

Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí. Určete, pro jaká x je druhá derivace definovaná. (`Návod:` f'' *je rovno derivaci funkce* f', *tj. derivaci první derivace funkce* f.)

1066. $y = \sqrt{1+x^2}$ **1068.** $y = \operatorname{cotg} x$ **1071.** $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$. (`Návod:` *Rovnice tečny:* $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$, *kde* $y_0 = f(x_0)$ *a* $k = f'(x_0)$. *Rovnice normály:* $y - y_0 = -(1/k)(x - x_0)$.)

1109. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1},\ x_0 = 0$ **1110.** $f(x) = x \cdot \sin x,\ x_0 = \pi$

1118. Ve kterém bodě paraboly $y = x^2 + 4x$ je její tečna rovnoběžná s osou x? (`Návod:` *Najděte bod* x_0 *ve kterém je derivace funkce* $x^2 + 4x$ *rovna nule. Dopočítejte* y_0 *z rovnice paraboly.*)

1119. Ve kterém bodě paraboly $y = x^2 - 2x + 5$ je její tečna kolmá k ose prvního kvadrantu? (`Návod:` *Osou prvního kvadrantu je přímka* $y = x$, *která má směrnici* $k_1 = 1$. *Najděte bod* x_0, *ve kterém má funkce* $x^2 - 2x + 5$ *derivaci* $k_2 = -1$. *Dopočítejte* y_0 *z rovnice paraboly.*)

1125. Pro jaká $x \in D(f)$ existuje tečna ke grafu funkce $f(x) = \ln \dfrac{1+\sqrt{x^2-1}}{x}$ v bodě $[x, f(x)]$? Existuje tečna rovnoběžná s osou x? Najděte rovnici tečny v bodě $[x_0, f_(x_0)]$ pro $x_0 = \sqrt{5}$.

III.5. Užití derivace, průběh funkce

Najděte intervaly, ve kterých je daná funkce ryze monotonní. Určete také, je-li zde rostoucí nebo klesající. (`Návod:` *O tom, kde je funkce rostoucí nebo klesající, rozhodněte podle znaménka první derivace.*)

1144. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ **1145.** $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$ **1146.** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

1148. $f(x) = 3x - x^3$ **1151.** $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ **1156.** $f(x) = x^2 - \ln x^2$

Určete definiční obor funkce f, vypočítejte jednostranné limity v krajních bodech intervalů tvořících definiční obor a určete intervaly, kde je funkce f rostoucí nebo klesající. Načrtněte graf funkce f.

1160. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$ **1161.** $f(x) = x^{1/x}$

Rozhodněte, zda funkce f má na intervalu I maximum a minimum. V kladném případě najděte hodnotu těchto extrémů a zjistěte, ve kterých bodech jich funkce f nabývá.

1164. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\quad I = \langle -2, 2\rangle$ **1169.** $f(x) = \sqrt{5-4x},\quad I = \langle -1, 1\rangle$

1174. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16,\quad I = \langle 1, 4\rangle$ **1175.** $f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{x^2},\quad I = \langle 1, 4\rangle$

1177. $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x^2},\quad I = \langle -1, 1\rangle$ **1179.** $f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x,\quad I = (0, 6\rangle$

Najděte lokální i globální extrémy následujících funkcí (na jejich definičních oborech).

1204. $y = x - 2\ln x$ **1209.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **1211.** $y = x + \dfrac{1}{x}$

1212. $y = \dfrac{(4-x)^3}{9\,(2-x)}$ **1217.** $y = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ **1218.** $y = x + 2\sqrt{-x}$

1241. Je dána funkce $f(x) = (1+x^2)\,e^x$. Vyšetřete její definiční obor, vypočítejte jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru a vyšetřete lokální extrémy.

Vyšetřete, na jakých maximálních intervalech jsou následující funkce konvexní a konkávní a určete jejich inflexní body. (`Návod:` *O tom, kde je funkce konvexní nebo konkávní, rozhodněte pomocí znaménka druhé derivace.*)

1255. $y = 3x^5 - 40x^3 + x - 2$ **1256.** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ **1259.** $y = \sqrt{1+x^2}$

1260. $y = \ln(1+x^2)$ **1262.** $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$ **1264.** $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

Vyšetřete, zda a jaké asymptoty mají následující funkce.

1267. $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ **1268.** $y = 2x - \dfrac{1}{x-2}$ **1270.** $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$

1272. $y = \dfrac{1-2x}{2+x}$ **1274.** $y = x + \dfrac{1}{x}$ **1275.** $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

Vyšetřete průběh následujících funkcí.

1277. $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ **1278.** $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ **1279.** $y = e^{-x^2}$

1281. $y = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4$ **1282.** $y = x^4 - 2x^2$ **1292.** $y = (x+2)\,\mathrm{e}^{1/x}$

1293. $y = (x-3)\sqrt{x}$ **1295.** $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ **1308.** $y = \mathrm{e}^{2x-x^2}$

1317. $y = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **1319.** $y = \ln(4-x^2)$ **1321.** $y = x + \operatorname{arccotg} x$

III.6. Taylorova věta

Sestavte Taylorův polynom n–tého stupně funkce f v bodě x_0. Napište, jak lze vyjádřit zbytek po n–tém členu.

1330. $f(x) = \mathrm{e}^x,\quad n = 5,\quad x_0 = 0$ **1331.** $f(x) = \mathrm{e}^x,\quad n = 5,\quad x_0 = 1$

1333. $f(x) = \mathrm{e}^{3x},\quad n = 4,\quad x_0 = 0$ **1337.** $f(x) = \sin x,\quad n = 7,\quad x_0 = 0$

1346. $f(x) = \ln(x+1),\quad n = 7,\quad x_0 = 0$ **1351.** $f(x) = \sqrt{x},\quad n = 4,\quad x_0 = 1$

1352. $f(x) = \sqrt{x+3},\quad n = 3,\quad x_0 = 0$ **1354.** $f(x) = \dfrac{1}{x},\quad n = 4,\quad x_0 = 1$

Vypočítejte přibližně s přesností ε (tj. s chybou nepřevyšující ε) následující hodnoty. (`Návod:` *Máme vypočítat přibližně hodnotu funkce f v bodě x, který se nachází „blízko" jiného bodu x_0, ve kterém je hodnota $f(x_0)$ známá. Stanovte n tak velké, aby zbytek $R_{n+1}(x)$ byl menší nebo roven ε na nějakém intervalu, obsahujícím x. Poté hodnotu $f(x)$ vyjádřete přibližně Taylorovým polynomem $T_n(x)$.*)

1362. $1/\mathrm{e},\quad \varepsilon = 10^{-3}$ **1363.** $\cos 5^o,\quad \varepsilon = 10^{-3}$ **1365.** $\ln 1.2,\quad \varepsilon = 10^{-3}$

1376. Určete Taylorův polynom T_2 funkce $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ v bodě $x_0 = 0$. Pomocí Lagrangeova tvaru zbytku odhadněte shora výraz $|f(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2})|$.

IV. NEURČITÝ INTEGRÁL

IV.1. Základní vlastnosti neurčitých integrálů, tabulkové integrály

Pomocí tabulkových integrálů vypočítejte:

1448. $\displaystyle\int 3x^7\,\mathrm{d}x$ **1450.** $\displaystyle\int (3-x^2)^3\,\mathrm{d}x$ **1452.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

1454. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **1455.** $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **1458.** $\displaystyle\int (1-2u)\,\mathrm{d}u$

1459. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$ **1460.** $\displaystyle\int (2x^{-1,2}+3x^{-0,8}-5x^{0,38})\,\mathrm{d}x$

1461. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ **1464.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **1467.** $\displaystyle\int \left(\frac{3^3}{x^3}+\frac{3^2}{x^2}+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

1468. $\displaystyle\int 10^x\,\mathrm{d}x$ **1470.** $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,\mathrm{d}x$ **1473.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

1474. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **1475.** $\displaystyle\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

IV.2. Integrace metodou per–partes

Metodou per–partes vypočítejte:

1481. $\displaystyle\int x\,e^x\,\mathrm{d}x$ **1482.** $\displaystyle\int x\,\ln x\,\mathrm{d}x$ **1483.** $\displaystyle\int x\,\sin x\,\mathrm{d}x$

1484. $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **1485.** $\displaystyle\int x\,\cos x\,\mathrm{d}x\,;$ **1486.** $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$

1489. $\displaystyle\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x,\ \ n\neq -1$ **1494.** $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **1502.** $\displaystyle\int \arcsin^2 t\,\mathrm{d}t$

1504. $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$ **1506.** $\displaystyle\int e^{7x}\cos 5x\,\mathrm{d}x$ **1510.** $\displaystyle\int (x^2-3x+2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

IV.3. Substituční metoda výpočtu neurčitých integrálů

Užitím substituční metody vypočítejte následující integrály:

1514. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ **1515.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ **1516.** $\displaystyle\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x$

1518. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ **1519.** $\displaystyle\int (1+x)^{15}\,\mathrm{d}x$ **1532.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$

1533. $\displaystyle\int \cos^3 x\,\sin 2x\,\mathrm{d}x$ **1534.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$ **1542.** $\displaystyle\int \cos(1-2x)\,\mathrm{d}x$

1546. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,\mathrm{d}x$ **1555.** $\displaystyle\int e^{-x^3}\,x^2\,\mathrm{d}x$ **1572.** $\displaystyle\int \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

1579. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x}\,\mathrm{d}x$ **1580.** $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **1594.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$

1615. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$ **1620.** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,\mathrm{d}x$ **1625.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

1628. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **1666.** $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ **1688.** $\displaystyle\int x^5e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

IV.4. Integrace racionálních funkcí

Vypočítejte neurčité integrály:

1720. $\displaystyle\int \frac{8}{3x-1}\,\mathrm{d}x$ **1722.** $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-2}\,\mathrm{d}x$ **1724.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

Pomocí rozkladu na parciální zlomky vypočítejte následující neurčité integrály:

1731. $\displaystyle\int \frac{u-1}{u^2+u}\,\mathrm{d}u$ **1733.** $\displaystyle\int \frac{5x-4}{x^2-8x+12}\,\mathrm{d}x$ **1734.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x$

1739. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ **1748.** $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,\mathrm{d}x$ **1749.** $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x$

1751. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ **1754.** $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ **1755.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

1761. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ **1793.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,\mathrm{d}x$ **1798.** $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$

IV.5. Integrace goniometrických funkcí a jejich mocnin

Vypočítejte následující neurčité integrály goniometrických funkcí.

1814. $\displaystyle\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x$ **1815.** $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ **1822.** $\displaystyle\int \sin^3 x\,\cos^5 x\,\mathrm{d}x$

1823. $\displaystyle\int \sin x\,\cos^5 x\,\mathrm{d}x$ **1828.** $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **1832.** $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

1833. $\displaystyle\int \sin^4 5x\,\mathrm{d}x$ **1858.** $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}x$ **1864.** $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

1865. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ **1871.** $\displaystyle\int \cos 2x\,\cos 3x\,\mathrm{d}x$ **1873.** $\displaystyle\int \cos 2x\,\sin 4x\,\mathrm{d}x$

IV.6. Integrály typu $\displaystyle\int R\left(x,\ \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x\,.$

Vypočítejte neurčité integrály:

1892. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **1895.** $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x})}{6\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$ **1896.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1898. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,\mathrm{d}x$ **1899.** $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$

V. URČITÝ (RIEMANNŮV) INTEGRÁL

V.1. Základní vlastnosti určitých integrálů, Newtonova–Leibnizova formule

Pomocí tabulky neurčitých integrálů a Newtonovy–Leibnizovy formule vypočítejte následující určité integrály:

1985. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3+3x^2-5\right)\,\mathrm{d}x$ **1986.** $\displaystyle\int_0^a \left(a^2x-x^3\right)\,\mathrm{d}x$ **1989.** $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\,\mathrm{d}x$

1991. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ **1992.** $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ **1993.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$

1996. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **2000.** $\displaystyle\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x$ **2002.** $\displaystyle\int_1^4 \left(1-\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$

V.2. Výpočet určitého integrálu substituční metodou a metodou per–partes.

Užitím substituční metody a metody integrace per–partes vypočítejte následující určité integrály:

2010. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **2011.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ **2012.** $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

2015. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ **2017.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$ **2020.** $\displaystyle\int_5^1 \frac{t}{\sqrt{5+4t}}\,\mathrm{d}t$

2024. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ **2030.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ **2031.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

2032. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ **2035.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **2036.** $\displaystyle\int_{-1}^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

2038. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ **2039.** $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$ **2040.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

2043. $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$ **2044.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

V.3. Nevlastní Riemannův integrál

Ověřte, zda následující nevlastní integrály konvergují, a pokud ano, určete jejich hodnoty.

2050. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ **2051.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **2054.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$

2056. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ **2057.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ **2058.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2060. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ **2063.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

V.4. Některé geometrické aplikace určitého integrálu

Určete obsahy P křivočarých lichoběžníků ohraničených osou x a křivkami o rovnicích:

2067. $y=x\sqrt{1-x^2},\ x=0,\ x=1$ **2068.** $y=x^2-4,\ x=0,\ x=6$

Určete obsahy rovinných obrazců ohraničených křivkami o rovnicích:

2069. $y = 3 - 2x - x^2,\ y = 0$

2070. $y = x^3,\ y = x$

2074. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací kuželosečky o rovnici $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
a) kolem osy x, b) kolem osy y.

2075. Určete objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích $y^2 = 8x$, $y = x^2$ a) kolem osy x, b) kolem osy y.

Určete délku oblouku křivky, která je grafem zadané funkce.
(`Návod:` *Užijte vzorec* $l = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x$.)

2077. $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ pro $x \in \langle 1, 8\rangle$

V.5. Další příklady

Načrtněte obrazec, který je ohraničen danými křivkami a vypočítejte jeho obsah.

1. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$

2. $y = 3 - x,\ y = 2/x$

3. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ y = e$

4. $y = \dfrac{2}{1 + x^2},\ y = x^2$

5. Vypočítejte x–ové souřadnice průsečíků grafů daných funkcí f a g, resp. f a h, resp. g a h: $f(x) = x/8,\ g(x) = 8/x,\ h(x) = 8/x^2$. Načrtněte obrázek a určete obsah obrazce, který je omezen grafy těchto tří funkcí.

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací dané křivky kolem osy x. Načrtněte obrazec, který je ohraničen danou křivkou a osou x.

6. $y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi/2\rangle$

7. $y = 3 - x,\ x \in \langle 0, 3\rangle$

8. $y = e^x,\ x \in \langle 0, 1\rangle$

9. $y = \dfrac{1}{\cos x},\ x \in \langle 0, \pi/4\rangle$

10. $y = \sin x + \cos x,\ x \in \langle 0, \pi/2\rangle$

11. Určete objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích $y = \sqrt{x},\ y = x/2$ kolem osy x.

Určete délky oblouků křivek, které jsou grafy daných funkcí.

12. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$ pro $x \in \langle 2,\ 4\rangle$

13. $y = \sqrt{x^3}$ pro $x \in \langle 0, 4\rangle$

Určete střední hodnotu funkce na daném intervalu, tj. hodnotu $\mu(f) = \dfrac{1}{(b-a)} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

14. $f(x) = \sin^2 x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$

15. $f(x) = x\,\sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$

VÝSLEDKY

I.1. Vektory, vektorové prostory

2. $\mathbf{a} = (17, 10, 3)$ 8. $\mathbf{x} = (-1, 0, 3, 4)$ 15. 21 22. 63.4°
25. $\alpha = \frac{1}{2}$, -3 42. LN, 2; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 43. LZ, 1; např. $\mathbf{u}$ 44. LN, 2; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$
45. LZ, 1; např. $\mathbf{u}$ 50. LZ, 1; např. $\mathbf{x}$ 51. LZ, 2; např. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 53. LN, 3; $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$
68. pro všechna α; dim $= 2$ pro $\alpha = -1$, dim $= 3$ pro $\alpha \neq -1$
69. $k = 0,\ 3,\ -2$; dim $= 2$ 70. $a = 2,\ -1$; dim $= 2$
73. např. $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, vyjádření není jednoznačné, $\mathbf{b}$ vyjádřit nelze
79. ne, 2 85. ano 92. ne 93. ano 94. ano

I.2. Matice, determinanty

109. $\begin{pmatrix} 21, 5, 3, 11 \\ 10, 19, 5, 2 \end{pmatrix}$ 110. $\begin{pmatrix} 3, 6, 3 \\ 2, 4, 2 \\ 1, 2, 1 \end{pmatrix}$ 111. $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 112. $\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 3, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix}$ 117. $\begin{pmatrix} 15, 20 \\ 20, 35 \end{pmatrix}$

124. $\begin{pmatrix} 6, 0 \\ 0, 5 \end{pmatrix}$ 132. $\begin{pmatrix} -10, -4, -7 \\ 6, 14, 4 \\ -5, 5, -4 \end{pmatrix}$ 133. $\begin{pmatrix} 4, -4, 4 \\ -4, -1, 0 \\ 2, 4, -4 \end{pmatrix}$ 139. $x = 14,\ y = 2$ 140. $x = 4,\ y = 2$

143. 3, regulární 148. 2, singulární 149. 3, singulární 160. $\begin{pmatrix} -1, 1 \\ 1, -0.5 \end{pmatrix}$ 161. $\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ -3, 1, 0 \\ 9, -3, 1 \end{pmatrix}$

166. neexistuje 168. $\begin{pmatrix} 1, -4, -3 \\ 1, -5, -3 \\ -1, 6, 4 \end{pmatrix}$ 170. $\begin{pmatrix} 1, -2, 7 \\ 0, 1, -2 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$ 171. $\begin{pmatrix} 2, -1, 0, 0 \\ -3, 2, 0, 0 \\ 31, -19, 3, -4 \\ -23, 14, -2, 3 \end{pmatrix}$

174. $\begin{pmatrix} -3, 2, 0 \\ -4, 5, -2 \\ -5, 3, 0 \end{pmatrix}$ 175. $\begin{pmatrix} 0.5, 0.25 \\ 0, 0.5 \end{pmatrix}$ 176. $\begin{pmatrix} 5, -9 \\ -0.5, 4.5 \end{pmatrix}$ 177. $\begin{pmatrix} 8, -1 \\ -19, 2 \end{pmatrix}$

178. $x \neq y,\ x \neq z,\ y \neq z,\ \begin{pmatrix} -1.5, 2, -0.5 \\ 0.5, -1, 0.5 \\ 0.5, 1, -0.5 \end{pmatrix}$

180. $\cos 2x$ 185. -58 190. $2a^2(a + x)$ 200. $3a - b$

I.4. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic

235. $\lambda_1 = 3,\ X_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \lambda_2 = 1,\ X_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ \alpha, \beta \neq 0$

236. $\lambda_1 = 7,\ X_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \lambda_2 = -2,\ X_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix},\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ \alpha, \beta \neq 0$

237. $\lambda_1 = ai,\ X_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},\ \ \lambda_2 = -ai,\ X_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ \alpha, \beta \neq 0$

238. $\lambda = 2,\ X = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{C},\ |\alpha| + |\beta| \neq 0$

241. $\lambda_1 = 1,\ X_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix},\ \ \lambda_2 = -1,\ X = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix},\ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C},\ |\alpha| + |\beta| \neq 0,\ \gamma \neq 0$

243. $\lambda_1=-2,\ X_1=\alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_2=1,\ X_2=\beta\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix},\quad \alpha,\beta\in\mathbf{C},\quad \alpha,\beta\neq 0$

244. $\lambda=1,\ X=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\neq 0$ 245. ne 246. ne

250. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=3,\\ \lambda_2=1,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}p\\p\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}q\\-q\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2/3,-1/3\\-1/3,2/3\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=1/\lambda_1=1/3,\\ \eta_2=1/\lambda_2=1,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_2$

251. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=7,\\ \lambda_2=-2,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}p\\p\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}-4q\\5q\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2/14,4/14\\5/14,-3/14\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=1/\lambda_1=1/7,\\ \eta_2=1/\lambda_2=-1/2,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_2$

252. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=i\sqrt{5},\\ \lambda_2=-i\sqrt{5},\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}p\\pi\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}q\\-qi\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}0,-1/5\\1/5,0\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=1/\lambda_1=-i/5,\\ \eta_2=1/\lambda_2=i/5,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_2$

253. A: vl. č. $\begin{matrix}\lambda_1=2,\\ \lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{3},\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}2p\\-p\\0\end{pmatrix},\ X_{2,3}=\begin{pmatrix}3(2\pm\sqrt{3})q\\-2(2\pm\sqrt{3})q\\q\end{pmatrix},\ p,q\neq 0$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2,0,-3/2\\0,1/2,1/2\\1/2,1,-1/2\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=1/\lambda_1=1/2\\ \eta_{2,3}=1/\lambda_{2,3}=1/(1\pm\sqrt{3}),\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_{2,3}$

255. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=3,\\ \lambda_2=1,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}p\\p\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}q\\-q\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^2=\begin{pmatrix}5,4\\4,5\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=\lambda_1^2=9,\\ \eta_2=\lambda_2^2=1,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_2$

256. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=2,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}-p\\3p\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}0\\q\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^2=\begin{pmatrix}1,0\\9,4\end{pmatrix}$, vl. čísla $\begin{matrix}\eta_1=\lambda_1^2=1,\\ \eta_2=\lambda_2^2=4,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1,\ X_2$

257. A: vl. čísla $\begin{matrix}\lambda_1=2i,\\ \lambda_2=-2i,\end{matrix}$ vl. vektory $X_1=\begin{pmatrix}-p\\pi\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}-q\\-qi\end{pmatrix},\ p,q\in\mathbf{C},\ p,q\neq 0$

$A^2=\begin{pmatrix}-4,0\\0,-4\end{pmatrix}$, vl. číslo $\eta=\lambda_1^2=\lambda_2^2=-4$, vl. vektory $X_1,\ X_2$

258. A: vl. číslo $\lambda=-1$, vl. vektory $X=\begin{pmatrix}-p\\-p\\p\end{pmatrix},\ p\in\mathbf{C},\ p\neq 0$

$A^2=\begin{pmatrix}-3,1,-3\\-8,4,-5\\0,1,2\end{pmatrix}$, vl. číslo $\eta=\lambda^2=1$, vl. vektory X

I.5. Soustavy lineárních algebraických rovnic

273. ano 1
275. ano, ∞
276. ano, 1
278. $a\neq 1,-2\ \ldots\ 1$ řešení, $a=1\ \ldots\ \infty$ řešení, $a=-2\ \ldots\ 0$ řešení
280. $a\neq 0\ \ldots\ 1$ řešení, $a=0\ \ldots\ 0$ řešení,
283. $\lambda\neq 5\ \ldots\ 0$ řešení, $\lambda=5\ \ldots\ \infty$ řešení
287. ne
288. ano, $x=2,\ y=3,\ z=5$
295. ne
300. 1 pro $\lambda=1$, 0 pro $\lambda\neq 1$
301. 1 pro $\lambda=2$, 0 pro $\lambda\neq 2$
308. $x=0,\ y=0,\ z=0$
309. $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=0$

310. $x_1 = -11p,\ x_2 = -p,\ x_3 = 7p,\ p \in \mathbb{R}$

316. $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

317. $x_1 = 5p + q,\ x_2 = q,\ x_3 = 2p,\ x_4 = 6p,\ p, q \in \mathbb{R}$

324. řešení neexistuje   328. $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

332. $x_1 = p - 1,\ x_2 = 3p - 1,\ x_3 = 7p,\ p \in \mathbb{R}$ 337. $x = 0,\ y = 2,\ z = \frac{5}{3},\ v = -\frac{4}{3}$

338. $x_1 = -8,\ x_2 = 6,\ x_3 = 12,\ x_4 = 3$

348. pro $a = 1$ řešení neexistuje, pro $a \neq 1$ je $x = \dfrac{3}{2(a-1)},\quad y = \dfrac{1}{2},\quad z = \dfrac{4a-7}{2(a-1)}$

349. pro $a = 1$ řešení neexistuje, pro $a = 2$ je $x = -6p + 4,\ y = -p + \frac{3}{2},\ z = 2p,\ p \in \mathbb{R}$,
pro $a \neq 1,\ a \neq 2$ je $x = y = z = 1/(a-1)$

350. pro $\alpha = 1$ řešení neexistuje, pro $\alpha = -2$ je $x = p + \frac{4}{3},\ y = p - \frac{1}{3},\ z = p,\ p \in \mathbb{R}$,
pro $\alpha \neq 1,\ \alpha \neq -2$ je $x = (1-2\alpha)/(1-\alpha),\ y = 0,\ z = 1/(1-\alpha)$

359. pro $a = \frac{2}{5}$ řešení neexistuje, pro $a \neq \frac{2}{5}$ existuje jediné řešení,
pro $a = 1$ je $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3},\ z = \frac{1}{3}$

360. pro $k \neq 5$ řešení neexistuje,
pro $k = 5$ existuje nekonečně mnoho řešení: $x = -p + 1,\ y = -7p + 2,\ z = 5p,\ p \in \mathbb{R}$

369. $\lambda = 0\ \ldots \begin{pmatrix} -16p \\ -7p \\ 4p \end{pmatrix},\quad \lambda = 1\ \ldots \begin{pmatrix} -3q \\ -q \\ q \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} p \neq 0 \\ q \neq 0 \end{matrix}$ 370. $x = \frac{45}{60},\ y = -\frac{10}{60},\ z - \frac{40}{60}$

III.1. Posloupnosti reálných čísel

	rost.	kles.	nerost.	nekles.	mon.	ryze mon.	zdola omez.	shora omez.	omez.	neomez.
575.	+	−	−	+	+	+	+	−	−	+
577.	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−
578.	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−
579.	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−
580.	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+
581.	−	+	+	−	+	+	+	+	+	−

591. $\mathbf{e}^3$ 594. $\frac{2}{3}$ 596. 0   599. $+\infty$ 609. $-\infty$ 612. $-\infty$ 618. $-3/2$
619. 0   620. 0   621. $-\infty$ 622. 1   623. 0   629. $\frac{1}{6}$
637. 0   638. $\frac{1}{2}$ 639. 0   642. 0   648. 1   651. $+\infty$ 654. 0

III.2. Funkce – základní pojmy a vlastnosti

657. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ 660. $(-3, \frac{5}{2}\rangle$ 661. $\langle -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\rangle$ 664. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

667. $\langle 0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$ 668. $(-\infty, (3-\sqrt{5})/2\rangle \cup \langle (3+\sqrt{5})/2, +\infty)$

674. $g(x) = (\sin x)^2,\ h(x) = \sin x^2$ 675. $g(x) = \ln(5x^2 + 3),\ h(x) = 5\ \ln^2(x+1) + 2$

678. $g(x) = \sin^2(2x+1) + 5\ \sin(2x+1),\ h(x) = \sin(2x^2 + 10x + 1)$

679. $g(x) = \cos(x+3),\ h(x) = \cos, x + 2$

687. lichá   694. lichá   695. sudá   698. ano, 2π 704. ne   707. ano, 2π

	supremum	infimum	maximum	minimum	shora omez.	zdola omez.	omez.
709.	1	-1	1	-1	ano	ano	ano
718.	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	ano	ano	ano
723.	$+\infty$	0	neexistuje	0	ne	ano	ne
727.	$+\infty$	2	neexistuje	2	ne	ano	ne
733.	$+\infty$	$-\infty$	neexistuje	neexistuje	ne	ne	ne
734.	$+\infty$	$-\infty$	neexistuje	neexistuje	ne	ne	ne

III.3. Limita a spojitost funkce

767. $L = 0$, např. $a = 100$ | 768. $L = 0$, např. $a = \ln 10$ | 791. $-\frac{1}{4}$

792. $-\frac{3}{5}$ | 796. -4 | 797. 0 | 807. $\frac{1}{2}$ | 816. 0 | 837. $\frac{5}{3}$

839. 1 | 840. 1 | 859. 3 | 863. 0 | 864. $\pi/2$ | 865. $\pi/2$

866. $+\infty$ | 869. 0 | 882. 1 887. $\mathbf{e}^6$ | 891. $-\frac{1}{2}$ | 902. $+\infty$

904. 0 | 909. $-\infty$ | 921. limita zleva $(-\infty)$ je různá od limity zprava $(+\infty)$

924. zvolíme-li například $x_n = \pi/2 + \pi n$, je $x_n \to +\infty$, ale $\lim_{n\to+\infty} \sin x_n$ neexistuje, protože $\sin x_n = (-1)^n$

926. limita zleva $(-\infty)$ je různá od limity zprava $(+\infty)$

929. $(-\infty, -1),\ (-1, +\infty)$ | 931. $(-\infty, -1),\ (-1, +\infty)$ | 932. $(-\infty, 1),\ (1, 2),\ (2, +\infty)$

937. $(-\infty, 0),\ (0, +\infty)$ | 939. $(0, 1),\ (1, +\infty)$ | 943. $(-\infty, 0),\ (0, +\infty)$

III.4. Derivace funkce a její geometrický i fyzikální význam

960. $10x + 7,\ x \in (-\infty, +\infty)$

968. $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2 - x + 5}},\ x \in (-\infty, +\infty)$

972. $\sqrt{x-1} + \dfrac{x+6}{2\sqrt{x-1}},\ x \in (1, +\infty)$

976. $\dfrac{x^2 + 10x - 3}{(x+5)^2},\ x \in (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$

979. $\dfrac{1}{\sqrt{5-x}} + \dfrac{x+2}{2\,(5-x)^{3/2}},\ x \in (-\infty, 5)$

980. $\dfrac{x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2},\ x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

990. $3\cos(3x),\ x \in (-\infty, +\infty)$

991. $-\sin x^2 \cdot 2x,\ x \in (-\infty, +\infty)$

993. $12\sin(6x)\,\cos(6x),\ x \in (-\infty, +\infty)$

999. $\cos(x^2 + 2x + 2) \cdot (2x + 2),\ x \in (-\infty, +\infty)$

1001. $2x \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x},\ x \in (-\pi/2 + k\pi, +\pi/2 + k\pi)$, k celé

1003. $\dfrac{1 + \cos x}{2\sqrt{1 + x + \sin x}},\ x \in (x_0, +\infty)$, kde x_0 je řešení rovnice $1 + x + \sin x = 0$

1008. $\dfrac{1}{2\sqrt{-x(x+1)}},\ x \in (-1, 0)$

1009. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)},\ x \in (0, +\infty)$

1016. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)},\ x \in (0, +\infty)$

1017. $2\,\mathbf{e}^{2x},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1018. $(10x - 2) \cdot \mathbf{e}^{5x^2 - 2x + 1},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1020. $\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{x/2},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1021. $10\,(\mathbf{e}^{5x} + 1)\,\mathbf{e}^{5x},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1027. $\dfrac{2x+3}{x^2 + 3x + 4},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1028. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1047. $\dfrac{7\sqrt{49x^2+1} + 49x}{(7x + \sqrt{49x^2+1})\sqrt{49x^2+1}},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1049. $2\,\mathrm{e}^{2x} \cdot (x^2+1)^2 + 4x\,\mathrm{e}^{2x} \cdot (x^2+1),\ x \in (-\infty, +\infty)$

1051. $-\dfrac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

1055. $f'(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \neq 0$

1056. $f'(x) = 1/x,\ x \neq 0$

1057. $f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sgn} x,\ x \in (-\infty, +\infty)$

1058. $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$

1062. $f'_+(4) = 4,\ f'_-(4) = -4$

1066. $(1+x^2)^{-3/2},\ x \in (-\infty, +\infty)$

1068. $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x},\ x \neq k\pi$, k celé

1071. $-4\,(x-1)^{-3},\ x \neq 1$

1109. $y - 1 = 0,\ x = 0$ | 1110. $y = -\pi \cdot (x - \pi),\ y = (x - \pi)/\pi$ | 1118. $[-2, -4]$ | 1119. $[\frac{1}{2}, \frac{17}{4}]$

1125. tečna existuje pro $x > 0$, tečna rovnoběžná s osou x je v bod $[\sqrt{2}, f(\sqrt{2})]$, rovnice tečny v bodě $[\sqrt{5}, f(\sqrt{5})]$ je $y - \ln(3/\sqrt{5}) = -(x - \sqrt{5})/(6\sqrt{5})$

III.5. Užití derivace, průběh funkce

1144. f je rostoucí na $(-\infty, -3\rangle$ a na $\langle 2, +\infty)$, klesající na $\langle -3, 2\rangle$
1145. f je rostoucí na $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}, +\infty)$, klesající na $\langle -\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3}\rangle$
1146. f je rostoucí na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, +\infty)$, klesající na $\langle -2, 0\rangle$
1148. f je rostoucí na $\langle -1, 1\rangle$, klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 1, +\infty)$
1151. f je klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 1, +\infty)$, rostoucí na $\langle -1, 1\rangle$
1156. f je rostoucí na $\langle -1, 0)$ a na $\langle 1, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $(0, 1\rangle$
1160. $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-1-} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-1+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
f je rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(-1, 1 - \sqrt{2}\rangle$ a na $\langle 1 + \sqrt{2}, +\infty)$,
klesající na $\langle 1 - \sqrt{2}, 1)$ a na $(1, 1 + \sqrt{2}\rangle$
1161. $D(f) = (0, +\infty)$, $\lim_{x\to0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
f je rostoucí na $(0, \mathrm{e}\rangle$, klesající na $\langle \mathrm{e}, +\infty)$
1164. $\max_I f = f(-2) = f(2) = 13$, $\min_I f = f(-1) = f(1) = 4$
1169. $\max_I f = f(-1) = 3$, $\min_I f = f(1) = 1$
1174. $\max_I f = f(4) = 4$, $\min_I f = f(2) = -4$
1175. $\max_I f = f(2) = 1$, $\min_I f = f(1) = -1$
1177. $\max_I f = f(1) = 4$, $\min_I f = f(0) = 0$
1179. $\max_I f$ neexistuje, $\min_I f = f(6) = -\frac{2}{3} \ln 6$
1204. absolutní minimum $y = 2 - 2 \ln 2$ v bodě $x = 2$
1209. absolutní maximum $y = 1/\mathrm{e}$ v bodě $x = \mathrm{e}$
1211. lokální minimum $y = 2$ v bodě $x = 1$, lokální maximum $y = -2$ v bodě $x = -1$
1212. lokální minimum $y = -2$ v bodě $x = 1$, lokální maximum $y = 2$ v bodě $x = -1$
1217. absolutní minimum $y = \frac{1}{3}$ v bodě $x = -1$, absolutní maximum $y = 3$ v bodě $x = 1$
1218. absolutní minimum $y = 1$ v bodě $x = -1$
1241. $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f nemá lokální extrémy
1255. konkávní na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$, konvexní na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 2, +\infty)$, inflexní body -2, 0, 2
1256. konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$, konvexní na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}, +\infty)$, inflexní body $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$
1259. konvexní na $(-\infty, +\infty)$
1260. konvexní na $\langle -1, 1\rangle$, konkávní na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 1, +\infty)$, inflexní body ± 1
1262. konvexní na $(-\infty, -2)$, konkávní na $(1, +\infty)$
1264. konvexní na $(-\infty, +\infty)$
1267. šikmá asymptota $y = -x$ (pro $x \to -\infty$ i pro $x \to +\infty$), svislé asymptoty $x = -2$, $x = 2$
1268. šikmá asymptota $y = 2x$ (pro $x \to -\infty$ i pro $x \to +\infty$), svislá asymptota $x = 2$
1270. šikmé asymptoty $y = 2x - \pi/2$ (pro $x \to -\infty$) a $y = 2x + \pi/2$ (pro $x \to +\infty$)
1272. šikmá asymptota $y = -2$ (pro $x \to -\infty$ i pro $x \to +\infty$), svislá asymptota $x = -2$
1274. šikmá asymptota $y = x$ (pro $x \to -\infty$ i pro $x \to +\infty$), svislá asymptota $x = 0$
1275. šikmá asymptota $y = x$ (pro $x \to +\infty$), svislá asymptota $x = 0$
1277. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, f je spojitá na $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ a na $(2, +\infty)$,
f je sudá,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-2+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to+2-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+2+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
$f'(x) = \dfrac{2x}{(4 - x^2)^2}$ pro $x \in D(f)$,

f je klesající na $(-\infty,-2)$ a na $(-2,0\rangle$, rostoucí na $\langle 0,2)$ a na $(2,+\infty)$,
f má lokální minimum $y_0=\frac{1}{4}$ v bodě $x_0=0$,
$f''(x)=\dfrac{8+6x^2}{(4-x^2)^3}$ pro $x\in D(f)$,
f je konkávní na $(-\infty,-2)$ a na $(2,+\infty)$, konvexní na $-2,2)$,
f má asymptotu $y=0$ pro $x\to-\infty$ a pro $x\to+\infty$ a svislé asymptoty $x=-2$ a $x=2$.

1278. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, f je spojitá na $(-\infty,+\infty)$,
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,
$f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}-1$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
f je klesající na $(-\infty,0\rangle$ a na $\langle\frac{8}{27},+\infty)$, rostoucí na $\langle 0,\frac{8}{27}\rangle$,
f má lokální minimum $y=0$ v bodě $x=0$ a lokální maximum $y=\frac{4}{27}$ v bodě $x=\frac{8}{27}$,
$f''(x)=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
f je konkávní na $(-\infty,0\rangle$ a na $\langle 0,+\infty)$, f nemá asymptoty

1279. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, f je spojitá na $(-\infty,+\infty)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$,
$f'(x)=-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ pro $x\in D(f)$, f je rostoucí na $(-\infty,0\rangle$ a klesající na $\langle 0,+\infty)$,
f má absolutní maximum $y=1$ v bodě $x=0$,
$f''(x)=(-2+4x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ pro $x\in D(f)$,
f je konvexní na $(-\infty,-\sqrt{2}/2\rangle$ a na $\langle\sqrt{2}/2,+\infty)$, konkávní na $\langle-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\rangle$,
f má asymptotu $y=0$ pro $x\to-\infty$ a pro $x\to+\infty$

1281. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, f je spojitá na $(-\infty,+\infty)$, sudá,
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $f'(x)=2x-2x^3$ pro $x\in D(f)$,
f je rostoucí na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 0,1\rangle$, klesající na $\langle -1,0\rangle$ a na $\langle 1,+\infty)$,
f má absolutní maximum $y=1.5$ v bodech $x=\pm1$, lokální minimum $y=1$ v bodě $x=0$,
graf protíná osu x v bodech $\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$,
$f''(x)=2-6x^2$ pro $x\in D(f)$, f je konkávní na $(-\infty,-\sqrt{3}/3\rangle$ a na $\langle\sqrt{3}/3,+\infty)$,
konvexní na $\langle-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3\rangle$, f nemá asymptoty

1282. $D(f)=(-\infty,+\infty)$, f je spojitá na $(-\infty,+\infty)$, sudá,
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f'(x)=4x^3-4x$ pro $x\in D(f)$,
f je klesající na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 0,1\rangle$, rostoucí na $\langle -1,0\rangle$ a na $\langle 1,+\infty)$,
f má absolutní minimum $y=-1$ v bodech $x=\pm1$, lokální maximum $y=0$ v bodě $x=0$,
graf protíná osu x v bodech $\pm\sqrt{2}$ a dotýká se jí v bodě $x=0$,
$f''(x)=12x^2-4$ pro $x\in D(f)$, f je konvexní na $(-\infty,-\sqrt{3}/3\rangle$ a na $\langle\sqrt{3}/3,+\infty)$,
konkávní na $\langle-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3\rangle$, f nemá asymptoty

1292. $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, f je spojitá na $(-\infty,0)$ a na $(0,+\infty)$,
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,
$f'(x)=\mathrm{e}^{1/x}\,\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
f je rostoucí na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 2,+\infty)$, klesající na $\langle -1,0)$ a na $(0,2\rangle$,
f má lokální maximum $y=\mathrm{e}^{-1}$ v bodě $x=-1$, lokální minimum $y=4\sqrt{\mathrm{e}}$ v bodě $x=2$
$f''(x)=\mathrm{e}^{1/x}\,\dfrac{5x+2}{x^4}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
f je konkávní na $(-\infty,-\frac{2}{5}\rangle$, konvexní na $\langle-\frac{2}{5},0)$ a na $(0,+\infty)$,
f má svislou asymptotu $x=0$ a šikmou asymptotu $y=x+3$ pro $x\to-\infty$ a pro $x\to+\infty$

1293. $D(f)=\langle 0,+\infty)$, f je spojitá na $\langle 0,+\infty)$, $f(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,
$f'(x)=\dfrac{3\,(x-1)}{2\sqrt{x}}$ pro $x\in(0,+\infty)$, f je rostoucí na $\langle 1,+\infty)$, klesající na $\langle 0,1\rangle$,
f má absolutní minimum $y=-2$ v bodě $x=1$,

$f''(x) = \dfrac{3\,(x+1)}{4x\,\sqrt{x}}$ pro $x \in (0, +\infty)$, f je konvexní na $\langle 0, +\infty)$, f nemá asymptoty

1295. $D(f) = (-\infty, +\infty)$, f je spojitá na $(-\infty, +\infty)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$,
$f'(x) = \dfrac{1+2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
f je rostoucí na $\langle -0.5, +\infty)$, klesající na $(-\infty, -0.5\rangle$,
f má absolutní minimum $y = -5/\sqrt{5}$ v bodě $x = -0.5$,
$f''(x) = -\dfrac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{5/2}}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
f je konkávní na $(-\infty, -(3+\sqrt{41})/8\rangle$ a na $\langle(-3+\sqrt{41})/8, +\infty)$,
konvexní na $\langle -(3+\sqrt{41})/8, (-3+\sqrt{41})/8\rangle$,
f má asymptotu $y = -1$ pro $x \to -\infty$ a $y = 1$ pro $x \to +\infty$

1308. $D(f) = (-\infty, +\infty)$, f je spojitá na $(-\infty, +\infty)$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,
$f'(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}\,2\,(1-x)$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
f je rostoucí na $(-\infty, 1\rangle$, klesající na $\langle 1, +\infty)$,
f má absolutní maximum $y = \mathrm{e}$ v bodě $x = 1$,
$f''(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-x^2}\,(2x^2-4x+1)$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
f je konkávní na $\langle 1-\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}/2\rangle$, konvexní na $(-\infty, 1-\sqrt{2}/2\rangle$, $\langle 1+\sqrt{2}/2, +\infty)$,
f má asymptotu $y = 0$ pro $x \to -\infty$ a pro $x \to +\infty$

1317. $D(f) = (-\infty, +\infty)$, f je spojitá na $(-\infty, +\infty)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi$,
$f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)^2}$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
f je klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $\langle 0, +\infty)$,
f má absolutní minimum $y = 0$ v bodě $x = 0$,
$f''(x) = -\dfrac{4x\,\mathrm{sgn}\,x}{(1+x^2)^2}$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
f je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, konvexní na $\langle 0, +\infty)$,
f má asymptotu $y = \pi$ pro $x \to -\infty$ a pro $x \to +\infty$

1319. $D(f) = (-2, 2)$, f je spojitá na $(-1, 1)$, sudá, $\displaystyle\lim_{x\to-2+} f(x) = \lim_{x\to+2-} f(x) = -\infty$,
$f'(x) = -\dfrac{2x}{4-x^2}$ pro $x \in (-2, 2)$,
f je rostoucí na $(-2, 0\rangle)$, klesající na $\langle 0, 2)$,
f má absolutní maximum $y = \ln 4$ v bodě $x = 0$,
$f''(x) = -\dfrac{8}{(4-x^2)^2}$ pro $x \in (-2, 2)$,
f je konkávní na $(-2, 2)$, f má svislé asymptoty $x = -2$ a $x = 2$

1321. $D(f) = (-\infty, +\infty)$, f je spojitá na $(-\infty, +\infty)$, lichá, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$, f je rostoucí na $(-\infty, +\infty)$,
$f''(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$,
f je konkávní na $(-\infty, 0\rangle$, konvexní na $\langle 0, +\infty)$,
f má asymptotu $y = x + \pi/2$ pro $x \to -\infty$ a $y = x$ pro $x \to +\infty$

III.6. Taylorova věta

1330. $T_5(x) = 1 + \dfrac{x}{1\,!} + \ldots + \dfrac{x^5}{5\,!}$, $\quad R_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\xi} x^6}{6\,!}$

1331. $T_5(x) = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{1\,!}\,(x-1) + \ldots + \dfrac{\mathrm{e}}{5\,!}\,(x-1)^5$, $\quad R_6(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\xi}}{6\,!}\,(x-1)^6$

1333. $T_4(x) = 1 + 3x + \dfrac{(3x)^2}{2\,!} + \dfrac{(3x)^3}{3\,!} + \dfrac{(3x)^4}{4\,!}, \quad R_5 x = \dfrac{(\ln\,2)^5}{5\,!}\,2^{\xi}\,x^5$

1337. $T_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3\,!} + \dfrac{x^5}{5\,!} - \dfrac{x^7}{7\,!}, \quad R_8(x) = \dfrac{\sin\,\xi}{8\,!}\,x^8$

1346. $T_7(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^7}{7}, \quad R_8(x) = -\dfrac{x^8}{8}\,(\xi+1)^8$

1351. $T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) - \frac{1}{8}\,(x-1)^2 + \frac{1}{16}\,(x-1)^3 - \frac{5}{128}\,(x-1)^4, \quad R_5(x) = \frac{7}{256}\,\xi^{-9/2}(x-1)^5$

1352. $T_3(x) = \sqrt{3} + \dfrac{x}{2\sqrt{3}} - \dfrac{x^2}{24\sqrt{3}} + \dfrac{x^3}{144\sqrt{3}}, \quad R_4(x) = -\dfrac{5\,x^4}{128\,(\xi+3)^{7/2}}$

1354. $T_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4, \quad R_5(x) = -(x-1)^5/\xi^6$

1362. $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \doteq \Big(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!}\Big)\Big|_{x=-1} = \dfrac{265}{720} = 0.3681$

1363. $\cos\,5^{\circ} \doteq \Big(1 - \dfrac{x^2}{2!}\Big)\Big|_{x=\pi/36} = 1 - \dfrac{\pi^2}{2592} = 0.9961923$

1365. $\ln\,1.2 \;=\; \ln\,(1+x)\,|_{x=0.2} \doteq \Big(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\Big)\Big|_{x=0.2} \;=\; 0.1826$

1376. $T_2(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2, \quad |f(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2})| \le \frac{5}{81}$

IV.1. Tabulkové integrály, základní vlastnosti neurčitých integrálů

1448. $\frac{3}{8}x^8 + C,\ x \in (-\infty, +\infty)$ 1450. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$ 1452. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$

1454. $-x^{-1} + C$ 1455. $\sqrt{x} + C,\ x \in \langle 0, +\infty)$ 1458. $u - u^2 + C$ 1459. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$

1460. $-10x^{-0,2} + 15x^{0,2} - 3,62x^{1,38} + C, \quad x \in (0, +\infty)$ 1461. $x - 2\ln|x| - x^{-1} + C$

1464. $\frac{6}{7}\,\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\,\sqrt[4]{x^3} + C,\ x \in \langle 0, +\infty)$ 1467. $3\ln|x| - \dfrac{9}{x} - \dfrac{27}{2x^2} + C$ 1468. $\dfrac{10^x}{\ln 10} + C$

1470. $3x - 2\dfrac{(1,5)^x}{\ln\,1,5} + C$ 1473. $0.5\,(\mathrm{tg}\,x + x) + C\,,\ x \in ((2k-1)\dfrac{\pi}{2}, (2k+1)\dfrac{\pi}{2}),\ k$ je celé číslo

1474. $C - \mathrm{cotg}\,x - \mathrm{tg}\,x$ 1475. $x - \sin x + C$

IV.2. Integrace metodou per–partes

1481. $e^x(x-1) + C$ 1482. $\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C,\ x \in (0, +\infty)$ 1483. $\sin x - x\cos x + C$

1484. $\frac{1}{2}\,[(x^2+1)\mathrm{arctg}\,x - x] + C$ 1485. $x\sin x + \cos x + C$ 1486. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

1489. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \dfrac{1}{n+1}) + C,\ x \in (0, +\infty)$ 1494. $x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

1502. $t\arcsin^2 t + 2\sqrt{1-t^2}\arcsin t - 2t + C,\ t \in \langle -1, 1\rangle$ 1504. $\frac{1}{2}\,(e^x\sin x - e^x\cos x) + C$

1506. $\dfrac{e^{7x}(7\cos 5x + 5\sin 5x)}{74} + C,$ při integraci volte $u = e^{7x}$ 1510. $e^x(x^2 - 5x + 7) + C$

IV.3. Substituční metoda výpočtu neurčitých integrálů

1514. $\ln\left|\dfrac{1}{1-x}\right| + C$ 1515. $\dfrac{\ln(2+e^{2x})}{2} + C$ 1516. $\ln|\sin x| + C\,,\ x \in (k\pi, (k+1)\pi)\,,\ k$ je celé číslo

1518. $2\sqrt{1+x^2} + C$ 1519. $\dfrac{(x+1)^{16}}{16} + C$ 1532. $3\sqrt[3]{\sin x} + C$ 1533. $C - \frac{2}{5}\cos^5 x$

1534. $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C,\ x \in \langle 1, +\infty)$ 1542. $C - \frac{1}{2}\sin(1-2x)$ 1546. $\ln(x^2 - 3x + 8) + C$

1555. $C - \frac{1}{3}e^{-x^3}$ 1572. $\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right] + C,\ x \in (-\infty, -\frac{1}{2})\,,\ x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

1579. $C - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \ln|1-x|\,,\ x \in (-\infty, 1)\,,\ x \in (1, +\infty)$ 1580. $\dfrac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg}\,x + C$

1594. $\frac{6}{5}\,[\sqrt[6]{x^5}+2\,\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\,\sqrt[12]{x^5}-1|\,]+C\,,\ x\in(0,1)\,,\ x\in(1,+\infty)$

1615. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2|+C\,,\,x\in(-1,1)$ 1620. $e^{-\cos x}+C$

1625. $\frac{2}{3}\,\ln(1+x^{\frac{3}{2}})+C\,,\ x\in\langle 0,+\infty)$ 1628. $2\sqrt{1+x^2}+3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$

1666. $\operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x)+\operatorname{tg}x-x+C\,,\ x\in(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi)\,,$ k je celé číslo

1688. $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$

IV.4. Integrace racionálních funkcí

1720. $\frac{8}{3}\,\ln|3x-1|+C\,,\ x\in(-\infty,\frac{1}{3})\,,\ x\in(\frac{1}{3},+\infty)$ 1722. $\dfrac{x^3}{3}+2x+\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$

1724. $-\dfrac{1}{2(x-3)^2}+C\,,\ x\in(-\infty,3)\,,\ x\in(3,+\infty)$ 1731. $\ln\dfrac{(u+1)^2}{|u|}+C$

1733. $\dfrac{13\ln|x-6|}{2}-\dfrac{3\ln|x-2|}{2}+C$

1734. $x+\dfrac{16\ln|x-4|}{3}-\dfrac{\ln|x-1|}{3}+C\,,\ x\in(-\infty,1)\,,\ x\in(1,4)\,,\ x\in(4,+\infty)$

1739. $\dfrac{x^2}{2}-3x+\ln\dfrac{(x+2)^8}{|x+1|}+C,\ x\in(-\infty,-2)\,,\ x\in(-2,-1)\,,\ x\in(-1,+\infty)$

1748. $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{(x+3)^6}{|(x+5)^5(x+1)|}+C\,,\ x\in(-\infty,-5)\ x\in(-5,-3)\,,\ x\in(-3,-1)\,,\ x\in(-1,+\infty)$

1749. $\dfrac{3}{x-2}+\ln\dfrac{(x-2)^2}{x^2}+C$

1751. $3\operatorname{arctg}x+\ln(x^2+1)-2\,\ln|x|+C\,,\ x\in(-\infty,0)\,,\ x\in(0,+\infty)$

1754. $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C\,,\ x\in(-\infty,0)\,,\ x\in(0,+\infty)$ 1755. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)+C$

1761. $\dfrac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)+C$

1793. $\dfrac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C\,,\ x\in(-\infty,-2)\,,\ x\in(-2,-1)\,,\ x\in(-1,+\infty)$

1798. $\ln\dfrac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C\,,\ x\in(-\infty,1)\,,\ x\in(1,+\infty)$

IV.5. Integrace goniometrických funkcí a jejich mocnin

1814. $\dfrac{\cos^7 x}{7}-\dfrac{3\cos^5 x}{5}+\cos^3 x-\cos x+C$ 1815. $\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$

1822. $\dfrac{\cos^8 x}{8}-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$ 1823. $-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$ 1828. $\dfrac{2x-\sin 2x}{4}+C$ 1832. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{32}+C$

1833. $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 10x}{20}+\dfrac{\sin 20x}{160}+C$

1858. $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+4}{3}+C\,,\ x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),$ k je celé číslo

1864. $\ln\sqrt{\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|}-\dfrac{1}{4}\operatorname{cotg}^2\dfrac{x}{2}+C,\ x\in(k\pi,(k+1)\pi),$ k je celé číslo

1865. $\dfrac{x}{2}-\ln\sqrt{|\sin x+\cos x|}+C\,,\ x\in(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi),$ k je celé číslo

1871. $\dfrac{\sin 5x}{10}+\dfrac{\sin x}{2}+C$ 1873. $-\dfrac{\cos 6x}{12}-\dfrac{\cos 2x}{4}+C$

IV.6. Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$

1892. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x} + 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C\,,\ x \in \langle 0, +\infty)$

1895. $\frac{2}{27}x^2\sqrt[4]{x} - \frac{2}{13}x\sqrt[12]{x} + C,\ x \in (0, +\infty)$

1896. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right| - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C\,,\ x \in (-1, 0)\,,\ x \in (0, 1\rangle$

1898. $\sqrt{3x^2-7x-6} + \dfrac{11}{2\sqrt{3}}\ln(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2}) + C$

1899. $x + 2 - 2\sqrt{x+2} + \ln\sqrt[3]{\dfrac{(2+\sqrt{x+2})^8}{(\sqrt{x+2}-1)^2}} + C,\ x \in (-2, -1),\ x \in (-1, +\infty)$

V.1. Základní vlastnosti určitých integrálů, Newtonova–Leibnizova formule

1985. 23/4	1986. $a^4/4$	1989. 21/8	1991. 1	1992. 45/4	1993. 2
1996. 1	2000. 2/15	2002. 7/6			

V.2. Výpočet určitého integrálu substituční metodou a metodou per–partes

2010. $\ln 2/2$	2011. π	2012. 1	2015. $2-\pi/2$	2017. 2.
2020. $-17/6$	2024. 8/21	2030. $\pi^2/32$	2031. $(1-\ln 2)/2$	2032. $\ln(4/3)$
2035. $\pi/6$	2036. $\pi/2-1$	2038. 1/3	2039. $2\ln 2 - 3/4$	2040. 2/3
2043. $\pi/2-1$	2044. $\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$			

V.3. Nevlastní Riemannův integrál

2050. diverguje	2051. 4	2054. $2\sqrt[4]{125}/3$	2056. 1/8	2057. $\ln\sqrt{3}$
2058. 1	2060. π	2063. diverguje		

V.4. Některé geometrické aplikace určitého integrálu

2067. 1/3 2068. Součet obsahů obou částí: 176/3

2069. 32/3 2070. Součet obsahů obou částí: 1/2

2074. a) $V_x = \pi\int_{-3}^{3}(4/9)(9-x^2)\,\mathrm{d}x = 16\pi$, b) $V_y = \pi\int_{-2}^{2}(9/4)(4-y^2)\,\mathrm{d}y = 24\pi$

2075. a) $V_x = 9{,}6\pi$, b) $V_y = 4{,}8\pi$ 2077. $4\sqrt{5}-\sqrt{2}$

V.5. Další příklady

1. 1/3	2. $3/2 - 2\ln 2$	3. 2	4. $\pi - 2/3$	5. $8\ln 8 - 9$
6. $\pi^2/4$	7. 9π	8. $(e^2-1)\pi/2$	9. π	10. $\pi + \pi^2/2$
11. $8\pi/3$	12. $6 + \ln 2/4$	13. $8(10\sqrt{10}-1)/27$		14. $\frac{1}{2}$
15. 1				