139

Konvergence lineárního dvouúrovňového schématu

Dvouúrovňová schémata lze zapsat jako

(1) $$U^{n+1} = R_n U^n + F^n,$$ kde

U, F jsou vektory a R_n čtvercová matice.

Př.: Např. explicitní schéma pro rovnici vedení tepla s homogenními Dirichletovými OP.

$$u_i^{n+1} = \sigma u_{i-1}^n + (1-2\sigma)u_i^n + \sigma u_{i+1}^n + \tau f_i^n$$

$$U^{n+1} = R_n U^n + F^n,$$ kde

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_K \end{bmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} 1-2\sigma & \sigma & 0 & & \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \sigma \\ & & 0 & \sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix}, \quad F = \tau \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix}$$

Uvažujme, že U^* je teoreticky přesné řešení, pak

$$U^*(t_{n+1}) = \mathbb{R}_n U^*(t_n) + F(t_n) + \tau \mathcal{X}_n$$
$$U^{n+1} = \mathbb{R}_n U^n + F^n \qquad \Big| \, -$$

$$\underbrace{U^{n+1} - U^*(t_{n+1})}_{E^{n+1}} = \mathbb{R}_n \underbrace{\left(U^n - U^*(t_n)\right)}_{E^n} - \tau \mathcal{X}_n$$

kde $\mathcal{X}_n$ je chyba diskretizace (vektor)
a E je globální chyba

Uvažujme, že $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$ je konstantní matice

Rekurencí dostaneme

$$E^{n+1} = (\mathbb{R})^n E^0 - \tau \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{R})^{n-i} \mathcal{X}_{i-1}$$

$$\Rightarrow \| E^{n+1} \| \leq \| \mathbb{R}^n \| \| E^0 \| + \tau \sum_{i=1}^{n} \| \mathbb{R}^{n-i} \| \| \mathcal{X}_{i-1} \| \qquad (E)$$

Pozn: 1) matice $\mathbb{R}$ zahrnuje i numerickou aproximaci OP

2) podobnou úvahu lze použít i pro implicitní schéma, protože

141

implicitní schéma lze zapsat ve tvaru

$$C U^{n+1} = B U^n + D$$

$$U^{n+1} = C^{-1} B U^n + C^{-1} D, \quad \text{kde}$$

C, B jsou čtvercové matice a D je vektor.

Zpět k nerovnici (E). Má-li globální chyba $\| E^{n+1} \|$ zůstat omezená, pak stačí, aby

$$\| R^n \| < c, \quad \forall\, n, \tau,\ n \cdot \tau \leq T,\ \tau < \tau_0$$

tzv. Laxova - Richtmeyerova definice stability.

Laxova věta o ekvivalenci: Konzistentní lineární metoda konverguje, právě když je stabilní.

Pozn: $\| R^n \| < c$ jestliže $\| R \| \leq 1 + \alpha \tau, \ \forall \tau < \tau_0$

protože

142

$$\underline{\|R^n\|} \le \|R\|^n \le (1+\alpha\tau)^n \le e^{\alpha n\tau} = \underbrace{e^{\alpha T}}_{\text{konstanta } C}$$

$\square$

Pozn: Pro dolní odhad $\|R\|$ (tj. pro horní odhad např. τ) lze využít spektrální poloměr R, neboť víme že $\varrho(R) \le \|R\|$.

Ověření: $RX = \lambda X$, λ vl. číslo R, X je vl. vektor R

$$\|RX\| = \|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|$$

$$\underline{|\lambda|\,\|X\|} = \|R\cdot X\| \le \underline{\|R\|\cdot\|X\|}$$

$|\lambda| \le \|R\|$ ... toto musí platit pro lib. λ

$$\Rightarrow \quad \underline{\varrho(R) = \max|\lambda| \le \|R\|}$$

$\square$

Pozor, zůstává zde problém v určení vl. čísel R, což je vyřešeno pouze pro několik speciálních případů (obecně nelze).

Potřebujeme tedy nějaké "jednodušší" kritérium pro určení stability, které je možné použít v praxi

1) spektrální kritérium

2) CFL kritérium

Spektrální kritérium stability

Motivace: Uvažujeme CÚ pro transportní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

rovnici řešíme pro $[x,t] \in G = (-\infty,\infty) \times$ $\times (0,T)$ pomocí centrálního schématu

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0 \qquad (*)$$

kde $u_k^n = u(x_k, t_n)$, $x_k = k \cdot h$
$t_n = n \cdot \tau$

(144)

Uvažujeme, že počáteční podmínka $u_0(x)$ je 2π-periodická funkce, tj. lze ji zapsat ve formě součtu Fourierovy řady (zde v komplexním tvaru)

$$\boxed{u_0(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e^{Ijx}} = \frac{a_0}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$$

kde α_j je komplexní číslo, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

a $I = \sqrt{-1}$

platí, že $\boxed{\alpha_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-Ijx} dx}$

Numerická metoda uvažuje pouze diskrétní hodnoty $x_k = k \cdot h$, tj. lze psát

$$u_k^0 = u_0(x_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j e^{Ijkh}$$

u_k^0 dosadíme do (*) a vypočteme u_k^1, tj. hodnoty u v 1. časové vrstvě

145

Schéma (*) lze pro $n=0$ zapsat jako

$$u_k^1 = u_k^0 - \frac{a\tau}{2h}\left(u_{k+1}^0 - u_{k-1}^0\right),$$

takže po dosazení Fourierova rozvoje dostaneme

$$u_k^1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\alpha_j e^{Ijkh}\underbrace{\left[1-\frac{a\tau}{2h}\left(e^{Ijh}-e^{-Ijh}\right)\right]}_{=\lambda_j}\right)$$

kde λ_j je tzv. zesilující faktor j-té harmonické složky (amplification factor)

Z rovnic

$$u_k^0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j e^{Ijkh}\cdot 1 \quad = \text{"}(\lambda_j)^0\text{"}$$

$$u_k^1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j e^{Ijkh}\cdot\lambda_j$$

snadno odvodíme, že

$$u_k^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j e^{Ijkh}\cdot(\lambda_j)^n,$$

tj. že amplituda j-té harmonické složky v čase t_n je rovna $\lambda_j^n\cdot\alpha_j$.

Je zřejmé, že pro $\forall\, jh \neq m \cdot \pi$ (násobku π)

je $$|\lambda_j| = \left[1 + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2(jh)\right]^{1/2} > 1$$

$\Rightarrow |u_k^n| \to \infty$ pro $n \to \infty$, tj. centrální

schéma je nepodmíněně (vždy) nestabilní!

Obecný přístup: Uvažujeme obecné numerické

lineární schéma ve tvaru $u_k^{n+1} = R\, u_k^n$,

kde R je operátor definovaný jako

$R\, u_k = \sum\limits_p \gamma_p\, u_{k+p}$. Hledáme vlastní

vektory u a vlastní čísla λ operátoru R, tj.

řešíme tzv. Sturm-Liouvillovu úlohu

(protože z vlastních funkcí lze sestavit bázi

prostoru všech řešení). Hledáme

nenulové řešení u_j rovnice

$$R\, u_j = \lambda_j\, u_j$$

147

Lze ukázat, že řešení má tvar (dosazením do $Ru = \lambda u$)

$$\lambda_j = \sum_p \gamma_p e^{I p jh}$$

$$u_j = e^{I K (jh)}$$

kde $(jh) = \varphi \in \langle 0; 2\pi)$.

Postup při použití spektrálního kritéria:

1) položíme $u_K^n = \lambda^n e^{IK\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a dosadíme do numerického schématu.

2) vyjádříme λ jako funkci φ

3) platí-li pro $\forall \varphi \in \langle 0, 2\pi)$ $|\lambda| \leq 1$, pak je numerické schéma stabilní (nutná podmínka stability).

148

Př.: Určete podmínku stability explicitního schématu pro rovnici vedení tepla pomocí spektrálního kritéria.

explicitní schéma lze zapsat jako

$$u_k^{n+1} = \sigma u_{k-1}^n + (1-2\sigma) u_k^n + \sigma u_{k+1}^n ,$$

kde $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$ (viz rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$).

Dosadíme $u_k^n = \lambda^n e^{Ik\varphi}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

$$\lambda^{n+1} e^{Ik\varphi} = \lambda^n \sigma \left(e^{I(k-1)\varphi} + e^{I(k+1)\varphi} \right) + \lambda^n (1-2\sigma) e^{Ik\varphi}$$

$$\lambda = \sigma 2 \cos\varphi + 1 - 2\sigma = 2\sigma(\cos\varphi - 1) + 1$$

musí platit $|\lambda| \leq 1$, tj

$$-1 \leq \lambda \leq 1$$

$$-1 \leq 2\sigma(\cos\varphi - 1) + 1 \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sigma \underbrace{(\cos\varphi - 1)}_{\in \langle -2; 0 \rangle} \leq 0$$

(149)

"nejhorší případ" $-1 \leq -2\sigma$

$$\underline{\underline{\sigma \leq \frac{1}{2}}}$$

neboli $\underline{\underline{\sigma \in \langle 0; \tfrac{1}{2} \rangle}}$

Př.: Určete stabilitu implicitní metody pro rovnici vedení tepla pomocí spektrálního kritéria.

implicitní metoda má tvar např.

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = p \, \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{h^2}$$

tj. $\underbrace{u_k^{n+1} - u_k^n = \sigma \left(u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1} \right)}$

dosadíme $u_k^n = \lambda^n e^{Ik\varphi}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

a dostaneme $\lambda - 1 = \lambda \sigma (2\cos\varphi - 2)$.

$$\lambda = \frac{1}{1 \underbrace{- 2\sigma(\cos\varphi - 1)}_{\geq 0}} \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \text{ pro } \forall \varphi$$

(150)

$\Rightarrow$ implicitní metoda je <u>nepodmíněně</u> (vždy) <u>stabilní</u>

<u>Př.:</u> Určete podmínku stability Laxova-Friedrichsova schématu pro transportní rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

L-F schéma má tvar

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n\right) - \frac{a}{2}\frac{\tau}{h}\left(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n\right)$$

dosadíme $u_k^n = \lambda^n e^{Ik\varphi}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

a dostaneme

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(e^{I\varphi} + e^{-I\varphi}\right) - \frac{a\tau}{2h}\left(e^{I\varphi} - e^{-I\varphi}\right) =$$

$$= \cos\varphi - \frac{a\tau}{\cancel{2}h}\cancel{2}\, I \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\lambda = \cos\varphi$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda = -\frac{a\tau}{h}\sin\varphi$$

$$|\lambda| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda)^2}$$

151

$$|\lambda|^2 = \cos^2\varphi + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\varphi =$$

$$= 1 - \sin^2\varphi + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\varphi$$

Je-li $|\lambda|^2 \leq 1$, pak také platí $|\lambda| \leq 1$

$$\cancel{1} - \sin^2\varphi + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \sin^2\varphi \leq \cancel{1}$$

$$\underbrace{\sin^2\varphi}_{\geq 0} \left[\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 - 1\right] \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 - 1 \leq 0$$

$$\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \leq 1$$

$$\left|\frac{a\tau}{h}\right| \leq 1$$

$$\frac{|a|\,\tau}{h} \leq 1$$

(tj. $\tau \leq \frac{h}{|a|}$)

152

<u>Pozn:</u> V případě vyšetřování stability 3-vrstvových lineárních diferenčních schémat (tj. schémat, kde stencil obsahuje body ze 3 časových vrstev) dostáváme pro λ kvadratickou rovnici
$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 .$$
Pro určení podmínky, pro kterou je $|\lambda| \leq 1$ slouží následující věta,

<u>Věta:</u> Nechť $a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Pak $|\lambda| \leq 1$ právě tehdy, když $|a_3| \leq |a_1|$ a zároveň $|a_1 + a_3| \geq |a_2|$.

<u>Př:</u> Určete podmínku stability explicitního schématu pro vlnovou rovnici pomocí spektrálního kritéria.

rovnice vedení tepla: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(153)

expl. schéma má tvar

$$\frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{h^2},$$

tj.

$$u_k^{n+1} - \sigma^2 u_{k-1}^n + 2(\sigma^2-1)u_k^n - \sigma^2 u_{k+1}^n + u_k^{n-1} = 0$$

dosadíme $u_k^n = \lambda^n e^{Ik\varphi}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

$$\lambda^2 - \sigma^2 \lambda e^{-I\varphi} + 2(\sigma^2-1)\cdot\lambda - \sigma^2 \lambda e^{I\varphi} + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda\sigma^2 2\cos\varphi + 2(\sigma^2-1)\lambda + 1 = 0$$

$$\underbrace{1}_{=a_1}\cdot\lambda^2 + \underbrace{2(\sigma^2 - \sigma^2\cos\varphi - 1)}_{=a_2}\cdot\lambda + \underbrace{1}_{a_3} = 0$$

$|\lambda| \leq 1$ právě když

$1 \leq 1$ a zároveň $2 \geq |2(\sigma^2 - \sigma^2\cos\varphi - 1)|$

$$\Rightarrow \quad |\sigma^2(1-\cos\varphi) - 1| \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma^2(1-\cos\varphi) - 1 \leq 1$$

$$0 \leq \sigma^2 \underbrace{(1-\cos\varphi)}_{\in\langle 0;2\rangle} \leq 2$$

"nejhorší případ" je

$$\cancel{8}\,\sigma^2 \leq \cancel{8}$$

$$\sigma^2 \leq 1$$

$$\left|\frac{\tau a}{h}\right| \leq 1$$

$$\frac{\tau |a|}{h} \leq 1$$

Courantovo - Friedrichsovo - Lewyho kriterium stability (CFL podmínka)

Uvažujeme počáteční úlohu pro parciální diferenciální rovnici evolučního typu. Definujeme tzv. <u>oblast závislosti řešení</u> počáteční úlohy v bodě $[x,t]$ jako množinu všech bodů, ve kterých má počáteční podmínka vliv na řešení v bodě $[x,t]$, viz konkrétní případy:

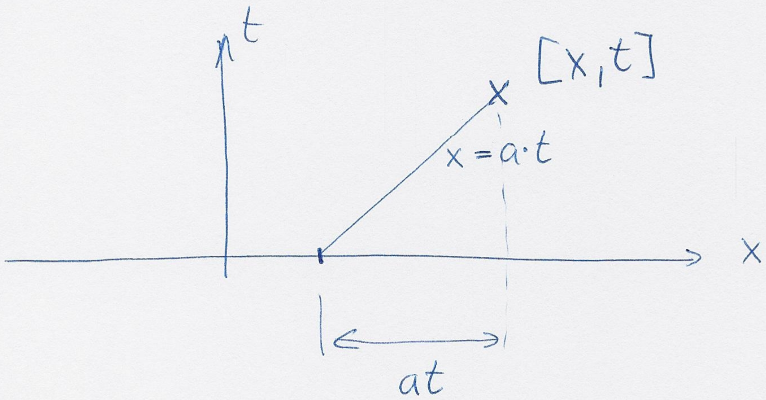
155

1) Transportní rovnice

Uvažujeme CÚ
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (*)$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

Lze psát
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot a = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{du(x(t),t)}{dt} = 0$$

$\Rightarrow$ $u(x(t),t) = \text{konst.}$ za předpokladu, že $\dfrac{\partial x}{\partial t} = a$, tj. $x = a\cdot t$



$\Rightarrow$ $u(x,t) = \varphi(x-at)$ přesné řešení lineární skalární transportní rovnice (*)

(156)

$\Rightarrow$ oblast závislosti řešení v bodě $[x,t]$

je jednobodová množina $D = \{x - at\}$

x-ová souřadnice poč. podm.

2) <u>Systém n hyperbolických rovnic 1. řádu</u>

(např. linearizované Eulerovy rovnice z mech. tekutin)

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + A \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0 \ , \quad U(x,0) = \Phi(x)$$

$$U(x,t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \vdots \\ u_n(x,t) \end{bmatrix} ,$$

A je reálná konstantní matice typu $n \times n$ s vlastními čísly λ_i, $i = 1, \dots, n$

a n lineárně nezávislými vlastními vektory

a poč. podmínka je vektor $\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$

157

Již víme, že lze psát $A = R \Lambda L$, kde R je matice pravostranných vl. vektorů, L levostranných vlastních vektorů a Λ je diagonální matice vlastních čísel matice A.

$$L \cdot \Big| \quad \frac{\partial U}{\partial t} + R \Lambda L \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial (LU)}{\partial t} + \underbrace{(LR)}_{=E} \Lambda \frac{\partial (LU)}{\partial x} = 0$$

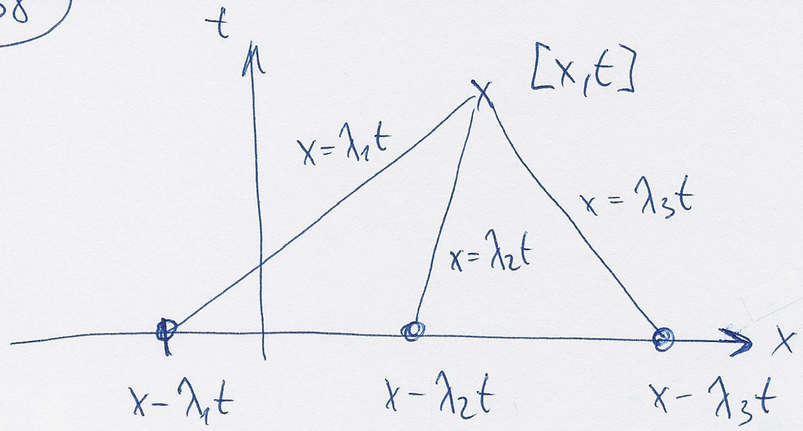
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \quad V = L \cdot U$$

poslední rovnici lze rozepsat po složkách na n nezávislých rovnic

$$\boxed{\frac{\partial V_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial V_i}{\partial x} = 0 , \quad i = 1, \dots, n}$$

V_i jsou složky vektoru V

$\Rightarrow$ oblast závislosti řešení v $[x, t]$ je množina $D = \{ x - \lambda_i t, \ i = 1, \dots, n \}$



3) Vlnová rovnice

Uvažujeme Cauchyovu úlohu

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a>0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

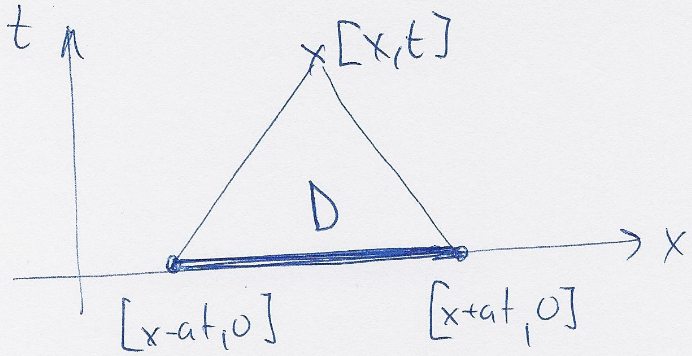
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \psi(x)$$

D'Alembertovo řešení (viz Vybrané statě z matematiky II, Jirásek, Kozel, Neustupa 1991)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy$$

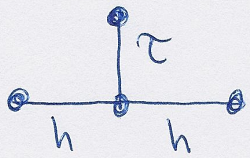
$\Rightarrow$ oblast závislosti řešení v bodě $[x,t]$ je interval $D = (x-at, x+at)$

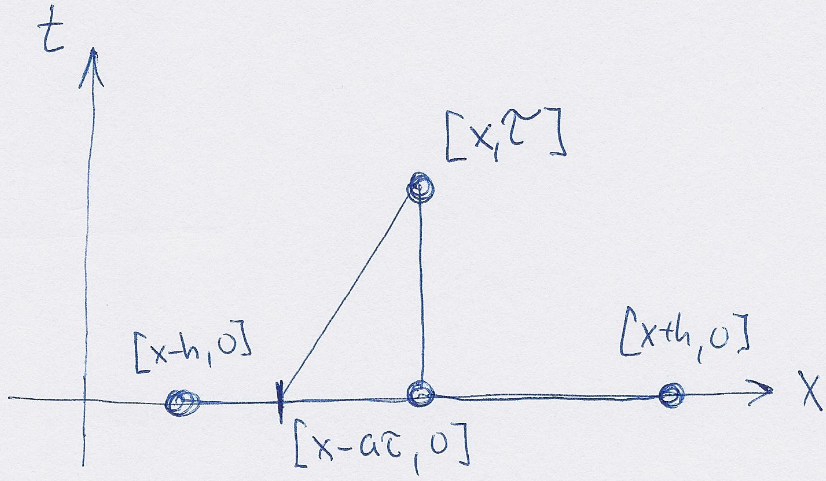


4) Pro rovnici vedení tepla dostáváme oblast závislosti řešení v bodě $[x,t]$ nekonečnou, tj. $D = (-\infty, \infty)$, tj. rychlost šíření informace je nekonečná (narozdíl od konečné velikosti u hyperbolických rovnic)

CFL podmínka: Numerická metoda může konvergovat pouze pokud oblast závislosti numerické metody obsahuje oblast závislosti parciální diferenciální rovnice alespoň v limitním případě pro τ a h jdoucí k nule.

Př: Laxovo-Friedrichsovo schéma pro 1D transportní rovnici má stencil





Musí platit

$$x-h \le x-a\tau \le x+h$$

$$-h \le -a\tau \le h$$

$$|-a\tau| \le h$$

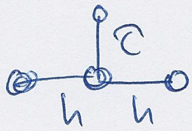
$$|a|\tau \le h$$

$$\tau \le \frac{h}{|a|}$$

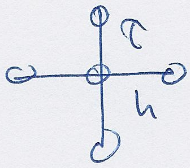
Pozn: Stejnou podmínku pro časový krok dostaneme i pro centrální schéma, které je však vždy nestabilní. CFL podmínka je nutná podmínka konvergence tj. konverguje-li numerické schéma, pak je CFL podmínka splněna (opačná implikace neplatí).

Př: Explicitní schéma pro vlnovou rovnici

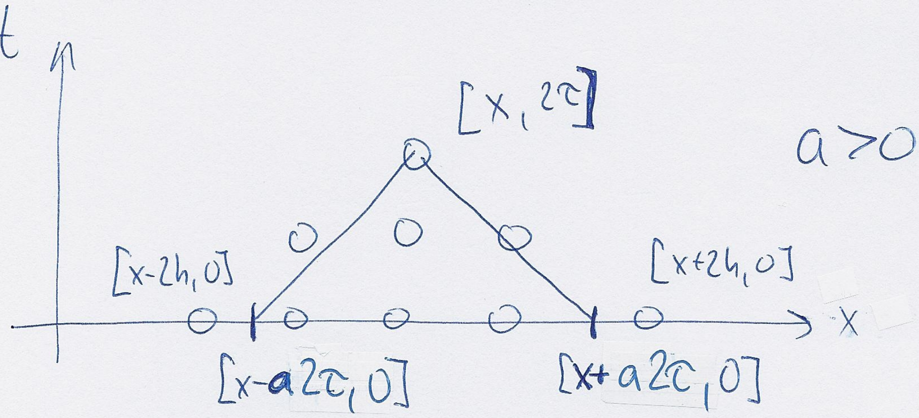
Stencil pro první čas. vrstvu (náhrada 2. řádu) je



a pro další časové vrstvy



$\Longrightarrow$

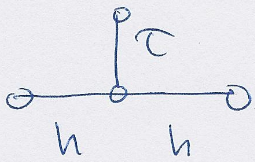


$a>0$

$$\Longrightarrow \quad a\cancel{2}\tau \le \cancel{2}h$$

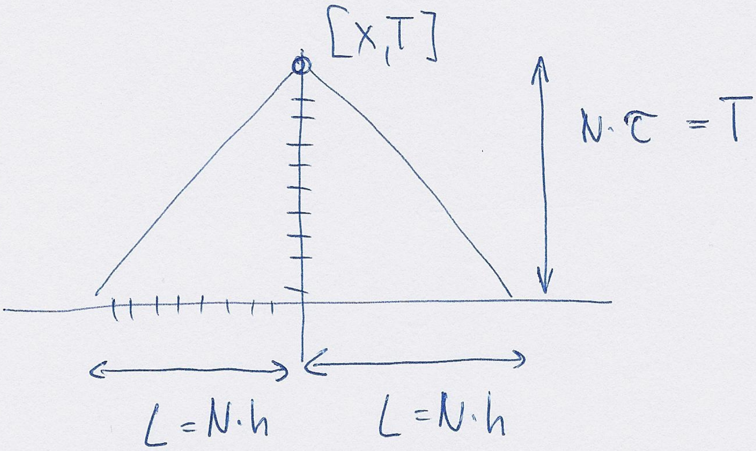
$$\tau \le \frac{h}{a}$$

Př: Explicitní schéma pro rovnici vedení tepla má stencil



$\Rightarrow$ schéma má pro konečné h a τ konečnou oblast závislosti, to je v rozporu s nekonečnou oblastí závislosti diferenciální rovnice. Budeme-li uvažovat podmínku

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2p} \qquad \left(\text{kde } \frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$



uvažujme pro jednoduchost $\tau = h^2$, pak $N = \frac{T}{\tau} = \frac{T}{h^2}$ a $\underline{\underline{L}} = N \cdot h = \frac{T}{h^2} \cdot h = \underline{\underline{\frac{T}{h}}}$

$\Rightarrow$ pro $h \to 0_+$ je $L = \frac{T}{h} \to +\infty$

Závěr: dodržíme-li podmínku $\tau \approx h^2$, pak