

Konvergence pozitivního 2 úrovnového schématu

Explicitní metody pro řešení úloh pro rovnici vedení tepla a pro transportní rovnici je možné zapsat ve tvaru

$$u_i^{n+1} = H(u_i^n), \text{ kde}$$

H je operátor přechodu z n -té časové vrstvy na $(n+1)$ -ou.

Podobně lze zapsat i implicitní metody pomocí maticového zápisu. Uvažujeme impl. metodu ve tvaru

$$C \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i_{\max}}^{n+1} \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{i_{\max}}^n \end{bmatrix} + V$$

kde C, B jsou reálné matice typu $[i_{\max} \times i_{\max}]$ a V je vektor $[i_{\max} \times 1]$. Označíme vektor neznámých jako U , pak

$$C^{-1} \cdot CU^{n+1} = BU^n + V$$

118

$$\underline{U}^{n+1} = C^{-1} B U^n + C^{-1} V = \underline{H(U^n)}$$

Definice: Schéma $u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n$ je
lineárním pozitivním schéma, platí-li

$$a_k \geq 0 \text{ pro } \forall k.$$

Pozn: Schémata pro rovnici vedení tepla
a transportní rovnici vznikla nahrazením
derivací diferenčními vzorci, ve kterých
je součet všech koeficientů roven nule

(např. 2. derivace $\frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sum_k a_k = 1}} \quad \begin{array}{l} \text{nutná podmínka} \\ \text{konistence schématu} \end{array} \quad \parallel$$

($\sum_k a_k = 1$ musí nutně platit i kvůli
konstantnímu řešení).

119

Věta: Konzistentní lineární pozitivní schéma konverguje.

Důkaz: Je-li schéma konzistentní, pak pro chybu aproximace \mathcal{X}_h platí

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0^+} \|\mathcal{X}_h\| = 0$$

Dále víme, že

$$u_i^{n+1} = \sum_k a_k u_{i+k}^n \quad (i)$$

$$u^*(x_i, t_{n+1}) = \sum_k a_k u^*(x_{i+k}, t_n) + \mathcal{X}_i^{n+1} \cdot \tau \quad (ii)$$

ude \mathcal{X}_i^{n+1} je chyba aproximace v bodě $[x_i, t_{n+1}]$ a τ je časový krok. Od (i) odečteme (ii) a dostaneme

$$e_i^{n+1} = \sum_k a_k e_{i+k}^n - \mathcal{X}_i^{n+1} \cdot \tau$$

$$\text{ude } e_i^n = u_i^n - u^*(x_i, t_n)$$

$$|e_i^{n+1}| = \left| \sum_k a_k e_{i+k}^n - \mathcal{X}_i^{n+1} \cdot \tau \right| \leq \sum_k a_k |e_{i+k}^n| + \tau \cdot |\mathcal{X}_i^{n+1}|$$

(120)

Zavedeme-li normy

$$\|e^{n+1}\| = \max_i |e_i^{n+1}|, \quad \|X^{n+1}\| = \max_i |X_i^{n+1}|$$

pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\| &\leq \sum_k a_k \|e^n\| + \tau \|X^{n+1}\| = \\ &= \|e^n\| + \tau \|X^{n+1}\| \end{aligned}$$

Rekurenci dostáváme

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\| &\leq \|e^n\| + \tau \|X^{n+1}\| \leq \|e^{n-1}\| + \tau \|X^n\| + \\ &+ \tau \|X^{n+1}\| \leq \dots \leq \|e^0\| + \tau \sum_{j=1}^{n+1} \|X^j\| \end{aligned}$$

Zavedeme-li dále $\|X\| = \max_n \|X^n\|$

pak

$$\|e^{n+1}\| \leq \|e^0\| + (n+1)\tau \cdot \|X\| \leq$$

$$\underbrace{\hspace{2cm}} \leq T \cdot \|X\| \rightarrow 0 \text{ pro } \|h\| \rightarrow 0_+$$

□

121

Pr. Konvergence explicitního schématu
pro rovnici vedení tepla:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \sigma (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + \tau f_i^n$$

$$\sigma = \frac{\tau a^2}{h^2}$$

pro úvahu konvergence využijeme homogenní
případ, tj. $f_i^n = 0$, pak

$$u_i^{n+1} = \underbrace{\sigma}_{a_{-1}} u_{i-1}^n + \underbrace{(1-2\sigma)}_{a_0} u_i^n + \underbrace{\sigma}_{a_1} u_{i+1}^n$$

→ použijeme předchozí větu

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = 1$$

⇒ schéma "respektuje"
konstantní řešení
(může být konstantní)

$$a_{-1} = a_1 = \sigma > 0$$

$$a_0 = 1 - 2\sigma \geq 0$$

$$\rightarrow \left| \sigma \leq \frac{1}{2} \right|$$

podmínka konvergence
expl. schématu
(shodná s podmínkou stability)

(122)

Príklad Ukázať nestabilitu chovalu expl.
sche'matu pro rovnici vedení tepla

Uvažujme

$$u_i^{n+1} = \sigma u_{i-1}^n + (1-2\sigma) u_i^n + \sigma u_{i+1}^n$$

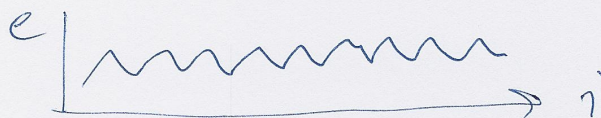
$$a \quad u^*(x_i, t_{n+1}) = \sigma u^*(x_{i-1}, t_n) + (1-2\sigma) u^*(x_i, t_n) + \sigma u^*(x_{i+1}, t_n) + \tau \mathcal{L}_i^{n+1}$$

odečtením rovnice získáme

$$e_i^{n+1} = \sigma e_{i-1}^n + (1-2\sigma) e_i^n + \sigma e_{i+1}^n + \underbrace{\tau \mathcal{L}_i^{n+1}}_{\text{zanedbatelne}}$$

kde $e_i^{n+1} = u^*(x_i, t_{n+1}) - u_i^{n+1}$
uvažujme chybu ve tvaru

$$e_i^0 = (-1)^i \cdot \varepsilon \quad \text{!}$$



dosažení

$$e_i^1 = (-1)^i (-\sigma + 1 - 2\sigma - \sigma) \varepsilon = (-1)^i (1-4\sigma) \varepsilon$$

rekurzí

$$e_i^n = (-1)^i (1-4\sigma)^n \cdot \varepsilon$$

123

je zřejmé, že pro $|1-4\sigma| < 1$

je $\lim_{n \rightarrow \infty} e_i^n = 0$.

$$|1-4\sigma| < 1$$

$$-1 < 1-4\sigma < 1$$

$$-2 \leq -4\sigma < 0$$

$$\frac{1}{2} > \sigma > 0$$



(Pro $|1-4\sigma| > 1$ chyba v každém kroku roste.)

Pozn: Vyšší uvedení postup je obšírně použitelný pro implicitní metody kvůli inverzi matice.

Pri: Laxovo-Friedrichsovo schéma pro transportní rovnici:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - \frac{a\tau}{2h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right)}_{=a_1} u_{i+1}^n + \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a\tau}{h}\right)}_{=a_{-1}} u_{i-1}^n \end{aligned}$$

124

$$1) \sum_k a_k = 1 \quad 0h$$

$$2) \quad a_n = 1 - \frac{a\tau}{h} \geq 0 \rightarrow \frac{a\tau}{h} \leq 1$$

$$a_{n-1} = 1 + \frac{a\tau}{h} \geq 0 \rightarrow \frac{a\tau}{h} \geq -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{a\tau}{h} \leq 1$$

reboli

$$\left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1$$

Metoda přímek (Method of lines - MOL)

Uvažujeme souššenou úlohu pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = p \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \quad p > 0 \quad (*)$$

pro $\forall [x,t] \in G = (0,1) \times (0,T)$

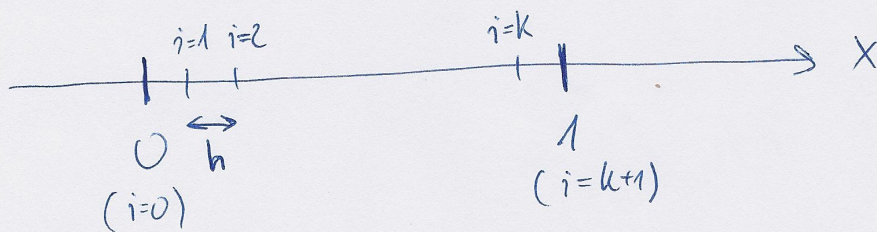
a počáteční podmínka

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \langle 0,1 \rangle$$

a homogenní okrajové podmínky

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in \langle 0,T \rangle.$$

Interval $\langle 0,1 \rangle$ pro x rozdělíme na $k+1$ stejných dílů o velikosti h :



V rovnici $(*)$ diskretizujeme pouze derivaci podle x , tj. dostáváme k semi-diskretních

Tj: jednu PDR jsme převedli pomocí diskretizace v prostorové proměnné na soustavu ODR. Místo smíšené úlohy pro PDR teď řešíme CU pro soustavu ODR:

$$V' = AV + B \quad \text{s poči. p. } V(t=0) = \begin{bmatrix} v_0(x_1) \\ v_0(x_2) \\ \vdots \\ v_0(x_k) \end{bmatrix} \quad (**)$$

Podle volby numerické metody pro řešení (**)
získáme konkrétní numerickou metodu pro řešení
původní úlohy (*):

metoda pro ODR (**)	\Rightarrow	metoda pro PDR (*)
Eulerova metoda		explicitní schéma
implicitní Eulerova m.		implicitní schéma
C-N metoda		C-N schéma

Dále vidíme, že stabilita numerické metody pro úlohu s PDR (*) je možné vyšetřit pomocí ekvivalentní úlohy pro ODR (**).

(128)

Zčásti zabytující se absolutní stabilitou soustav ODR víme, že pro stabilitu CÚ (***) potřebujeme znát vlastní čísla matice A .

Výraz $A \cdot V$ je doslovně analogie diferenciálního operátoru $Dv = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v$. Diferenciální operátor

D má vlastní funkce $\varphi_m(x) = \sin(m\pi x)$, které
yhovují homogenním OP, tj. $\varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0$.

(Lze ověřit $D\varphi_m = \lambda_m \varphi_m$, λ_m je vl. číslo operátora D). Pomocí vlastních funkcí φ_m vytvoříme vlastní vektory matice A jako

$$\underline{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \varphi_m(x_1) \\ \varphi_m(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_m(x_k) \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\pi h) \\ \sin(\pi 2h) \\ \vdots \\ \sin(\pi kh) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \sin(m\pi h) \\ \sin(m\pi 2h) \\ \vdots \\ \sin(m\pi kh) \end{bmatrix}$$

129

$$A \cdot \Phi_m = \lambda_m \Phi_m, \text{ kde } \lambda_m = ?$$

Uvažujme-li skalární součin i -tého řádku A s Φ_m , pak

$$\frac{p}{h^2} \left[\sin(m\pi(i-1)h) - 2 \sin(m\pi ih) + \sin(m\pi(i+1)h) \right] = \lambda_m \sin(m\pi ih)$$

Levou stranu poslední rovnice lze upravit pomocí vztahu

$$\begin{aligned} \sin(m\pi(i \pm 1)h) &= \sin(m\pi ih \pm m\pi h) = \\ &= \sin(m\pi ih) \cos(m\pi h) \pm \cos(m\pi ih) \sin(m\pi h) \end{aligned}$$

po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{2p}{h^2} \left[\cos(m\pi h) \sin(m\pi ih) - \cancel{\sin(m\pi ih)} - \cancel{\sin(m\pi ih)} \right] &= \\ &= \lambda_m \cancel{\sin(m\pi ih)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_m = \frac{2p}{h^2} (\cos(m\pi h) - 1), \quad m=1, \dots, k$$

(130)

U zvolené numerické metody pro ODR musí pro
každou krok τ platit, že $(\lambda_{\min} \tau) \in \Omega_a$,
kde Ω_a je oblast absolutní stability.

Vidíme, že platí $\lambda_k < \lambda_{k-1} < \dots < \lambda_1$

Uvažujme $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2p}{h^2} (\cos(\pi h) - 1) \stackrel{L'H}{=}$$

$$= 2p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\pi \sin(\pi h)}{2h} \stackrel{L'H}{=} 2p \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\pi^2 \cos(\pi h)}{2} =$$

$$= -\pi^2 p$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2p}{h^2} (\underbrace{\cos((1-h) \cdot \pi)}_{\rightarrow -1} - 1) = -\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\max |\lambda_{\min}|}{\min |\lambda_{\min}|}}_{\text{stiffness ratio}} \rightarrow \infty \text{ pro } h \rightarrow 0$$

(pro h konečné je stiffness ratio nastěšit' konečné')

131

Uvažujeme-li h malé pevné, pak

$$\lambda_u < \lambda_{u-1} < \dots < \lambda_1 < 0$$

$$a \quad \lambda_u \approx -\frac{4p}{h^2}$$

Uvažujeme-li explicitní schéma pro úlohu pro PDR (*), tj. uvažujeme expl. Eulerovu metodu pro CÚ (**). Expl. Eulerova metoda je stabilní pro

$$|1 + \tau \lambda_u| \leq 1$$

$$\left| 1 + \tau \frac{-4p}{h^2} \right| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - \frac{4\tau p}{h^2} \leq 1$$

$$-2 \leq -4 \frac{\tau p}{h^2} \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{\tau p}{h^2} \geq 0$$

podmínka stability explicitního schématu pro rovnici vedení tepla

132

Pozn: Kvalita na místě stiffness ratio pro $h \rightarrow 0$ je lepší použít BDF metodu (implicitní Eulerova metoda), která je navíc nepodmíněně stabilní.

Pozn: Řešme-li úlohu (*) na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ místo uvažovaného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, lze provést jednoduchou transformaci:

$$x \in \langle a, b \rangle \rightarrow \tilde{x} \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\tilde{x} = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [x, t] \in (a, b) \times (0, T)$$

$$\downarrow \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{p}{(b-a)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2}, \quad [\tilde{x}, t] \in (0, 1) \times (0, T)$$

Pozn: V případě nehomogenních OP, tj

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad [x,t] \in (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \langle 0,1 \rangle \\ \left. \begin{array}{l} u(0,t) = \alpha(t) \\ u(1,t) = \beta(t) \end{array} \right\} t \in \langle 0,T \rangle \end{array} \right.$$

provedeme následující substituci

$$\underline{u(x,t) = v(x,t) + \alpha(t) - x(\alpha(t) - \beta(t))}$$

$$x=0: u(0,t) = v(0,t) + \alpha(t) \Rightarrow v(0,t) = 0$$

$$x=1: u(1,t) = v(1,t) + \beta(t) \Rightarrow v(1,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha'(t) - x(\alpha'(t) - \beta'(t))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

\Rightarrow úlohu (1) můžeme ekvivalentně převést na úlohu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g, \quad [x,t] \in (0,1) \times (0,T)$$

$$v(x,0) = u_0(x) - \alpha(0) + x(\alpha(0) - \beta(0)), \quad x \in \langle 0,1 \rangle$$

134

$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

$$a \quad g = -\alpha'(t) + x(\alpha'(t) - \beta'(t)) + f$$

Pozn: Smíšená úloha s homogenními OP
Neumannova typu

Uvažujeme úlohu

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = p \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \quad p > 0$$

$$\text{pro } \forall [x,t] \in G = (0,1) \times (0,T)$$

$$\text{s poč. p. } v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \langle 0,1 \rangle$$

$$\text{a okraj. p. } \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

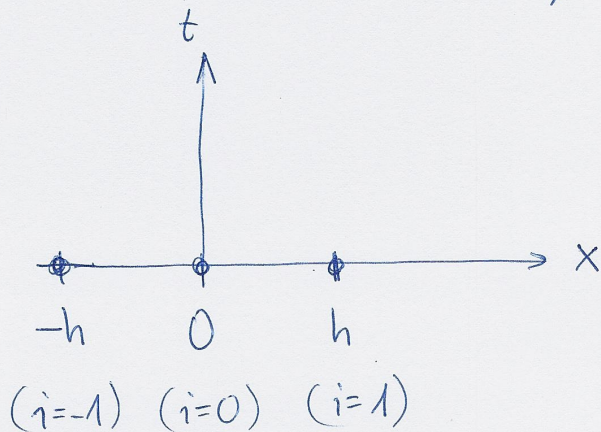
opět provedeme diskretizaci v prostorové proměnné x
a dostáváme semi-diskretizovanou metodu

$$(N) \left\{ \begin{array}{l} v_i'(t) = \frac{p}{h^2} (v_{i-1}(t) - 2v_i(t) + v_{i+1}(t)) + g_i(t) \\ i = 0, \dots, k+1, \quad \left. \begin{array}{l} v_{-1}(t) = v_1(t), \\ v_{k+2}(t) = v_k(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vysvětlím} \\ \text{na další} \\ \text{str.} \end{array} \end{array} \right.$$

135

Numerická realizace okrajové podmínky

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0$$



a) realizace 1. řádu přesnosti

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i=0} = \frac{V_1 - V_0}{h} + O(h) = 0$$

$\Rightarrow V_0 = V_1$ toto není použito (snížení řádu metody)

b)

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i=0} = \frac{V_1 - V_{-1}}{2h} + O(h^2) = 0$$

$\Rightarrow \underline{V_{-1} = V_1}$ použito už se (stejný řád jako u diskretizace 2. derivace)

136

Zpět k semi-diskrétní metodě (N). Metodu (N) lze zapsat ve formě

$$V' = AV + B, \quad \text{kde}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ v_{k+1}(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{p}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

matice typu $(k+2) \times (k+2)$,
je 0 2 rovnice víc než
úloha s Dirichletovými podmínkami

Při určení vlastních čísel matice A postupujeme analogicky. Uvažujeme vlastní funkce operátorem

$$Dv = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v, \quad \text{kteřé vyhovují OP, tj.}$$

$$\varphi_m(x) = \cos(m\pi x)$$

⋮

137

Pozn: Převod úlohy s nehomogenními Neumannovými podmínkami na úlohu s homogenními ...

Uvažujme úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad [x, t] \in (0, 1) \times (0, T)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

provedeme substituci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha(t) + x(\beta(t) - \alpha(t))$$

$$u = v + x\alpha(t) + \frac{x^2}{2}(\beta(t) - \alpha(t))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + x\alpha' + \frac{x^2}{2}(\beta' - \alpha')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta - \alpha$$

\Rightarrow dostáváme ekvivalentní formulaci dané úlohy ve formě

138

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g, \quad [x, t]$$

where $g = x\alpha' + \frac{x^2}{2}(\beta' - \alpha') - p\beta + p\alpha$

a $v(x, 0) = u_0(x) - x\alpha(0) - \frac{x^2}{2}(\beta(0) - \alpha(0)),$

$$x \in \langle 0, 1 \rangle$$

a $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle.$