93

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Rovnice vedení tepla (rovnice parabolického typu)

Uvažujeme rovnici

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{pro}$$

$\forall\ [x,t] \in G \subset \mathbb{R}^2$, C je reálná konstanta.

Pro tuto rovnici formulujeme dva typy úloh:

1) Počáteční úlohu, kde oblast řešení je

$$G = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$$

respektive $G = (-\infty, \infty) \times (0, T)$, $T > 0$.

a pro $x \in (-\infty, \infty)$ platí $u(x,0) = u_0(x)$

– počáteční podmínka

2) Smíšenou úlohu, kde

$$G = (a,b) \times (0, \infty)$$

respektive $G = (a,b) \times (0,T)$, $T > 0$

a řešení $u(x,t)$ musí splňovat počáteční podmínku $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$

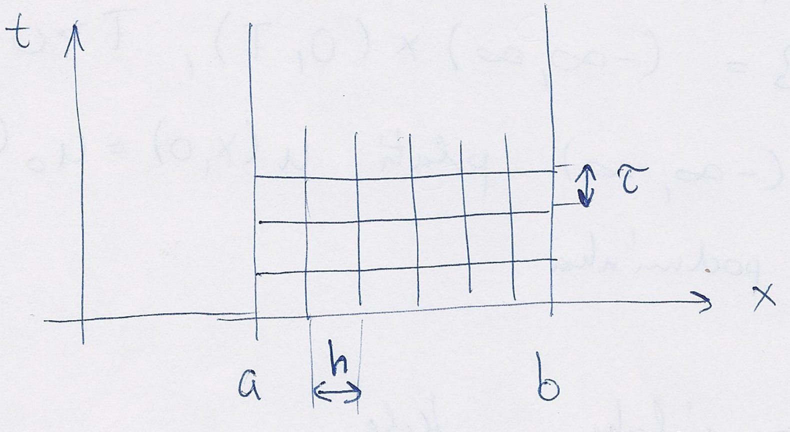
a okrajové podmínky
$$u(a,t) = \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t), \quad t \geq 0$$

(tzv. Dirichletovy okrajové podmínky).

Musí platit tzv. podmínky souhlasu
$$u_0(a) = \alpha(0), \quad u_0(b) = \beta(0).$$

Numerické řešení metodou sítí

Budeme uvažovat smíšenou úlohu pro rovnici vedení tepla. Vytvoříme síť s prostorovým krokem h a časovým krokem τ



definujeme
$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, i_{max}$$
$$t_n = n \cdot \tau, \quad n = 0, \dots, n_{max}$$
$$u_i^n = u(x_i, t_n)$$

Některá schémata pro metodu sítí:

explicitní schéma:

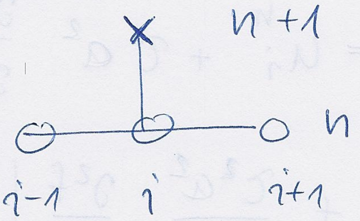
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + f_i^n$$

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n + \sigma\left(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n\right) + \tau f_i^n, \quad \text{kde } \sigma = \frac{\tau c^2}{h^2}}$$

explicitní schéma je stabilní pro $\sigma \leq \frac{1}{2}$ a je 2. řádu v prostorové proměnné x a 1. řádu přesnosti v proměnné t.

"stencil" je



explicitní schéma 2. řádu v obou proměnných x i t

(96)

analogicky metodě Taylorova typu pro ODR píšeme

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \tau \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_i^n + O(\tau^3)$$

kde $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$

a $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\right) =$$

$$= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\right) + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

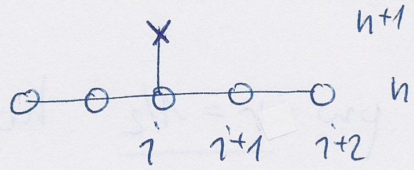
$$= c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \tau c^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n + \tau f_i^n + \frac{\tau^2 c^4}{2} \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n + \frac{\tau^2 c^2}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i^n$$

kde $$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_i^n = \frac{u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 6u_i^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{h^4} + O(h^4)$$

"stencil" této metody je



a metoda je stabilní pro $\sigma \leq \frac{1}{2}$

Implicitní schéma

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = c^2(1-r)\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} +$$

$$+ rc^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad r \in \langle 0, 1 \rangle$$

toto schéma je 2. řádu v prostorové proměnné x

a pro r $= 1/2$ 2. řádu v čase t

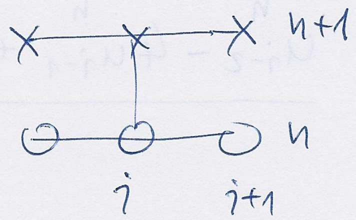
$\neq 1/2$ 1. řádu v t

pro $r \in \langle 0; 1/2)$ je schéma stabilní pro $\tau \leq$

$\leq \frac{1}{1-2r}\frac{h}{2c^2}$, pro $r \in \langle 1/2; 1)$ je nepodmíněně

stabilní.

"stencil" je



<u>Pozn.</u> pro <u>$r = 1/2$</u> hovoříme o tzv.

<u>Crankovu – Nicholsonovu schématu</u>

Vlnová rovnice (rovnice hyperbolického typu)

Uvažujeme rovnici

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

pro $\forall\, [x,t] \in G \subset R^2$, a je reálná konstanta

Pro tuto rovnici formulujeme opět dva typy úloh:

99

1) Počáteční úloha, kde oblast řešení je $G = (-\infty, \infty) \times (0, T)$, $T > 0$

a počáteční podmínky jsou

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x) \end{aligned}\right\}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

kde $u_0(x)$ a $v_0(x)$ jsou dané funkce

2) Smíšená úloha, kde oblast řešení je $G = (a, b) \times (0, T)$, $T > 0$

a řešení $u(x,t)$ musí splňovat počáteční podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v_0(x) \end{aligned}\right\}, \quad x \in \langle a, b \rangle$$

a okrajové podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(a,t) &= \alpha(t) \\ u(b,t) &= \beta(t) \end{aligned}\right\}, \quad t \geq 0$$

(opět Dirichletovy o.p.)

Musí platit podmínky souhlasu

$$u_0(a) = \alpha(0)$$
$$u_0(b) = \beta(0)$$
$$v_0(a) = \alpha'(0)$$
$$v_0(b) = \beta'(0)$$

Numerické řešení metodou sítí

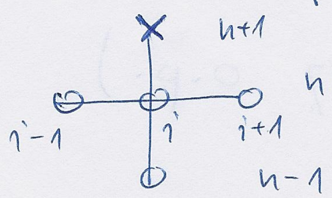
Definujeme stejnou síť jako v případě rovnice vedení tepla (tj. s konstantními kroky h a τ).

Explicitní schéma:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \, \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + f_i^n$$

Schéma je 2. řádu přesnosti v prostoru i čase, je stabilní pro $\Delta t \leq \frac{h}{|c|}$

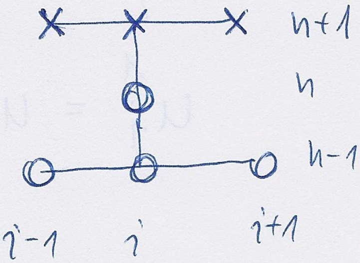
"stencil" je



Implicitní schéma:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2}\left[\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}\right]$$

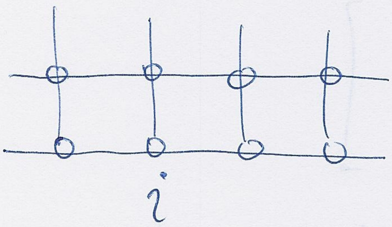
schéma je 2. řádu přesnosti v prostoru i čase, je nepodmíněně stabilní, "stencil"



Pozn.: U obou schémat pro vlnovou rovnici se ve vzorci schématu vyskytují hodnoty řešení u ve třech časových vrstvách t_{n-1}, t_n, t_{n+1}. Hodnoty u v t_{n+1} lze vypočítat pouze, jsou-li známy hodnoty u v časech t_n a t_{n-1} $\Rightarrow$ před "spuštěním" výpočtu je třeba napočítat řešení ve dvou časových vrstvách t_0 a t_1 pomocí počátečních podmínek. Ukážeme si dva způsoby výpočtu u_i^0 a u_i^1.

a) definujeme síť $\quad x_i = a + ih$

$t_n = 0 + n\cdot\tau$



t_1 (tj. $t=\tau$)

t_0 (tj. $t=0$)

z Taylorova rozvoje

$$u_i^1 = u_i^0 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_i^0}_{=v_0(x_i)} \cdot\tau + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_i^0}_{=?} \frac{\tau^2}{2} + \underline{O(\tau^3)}$$

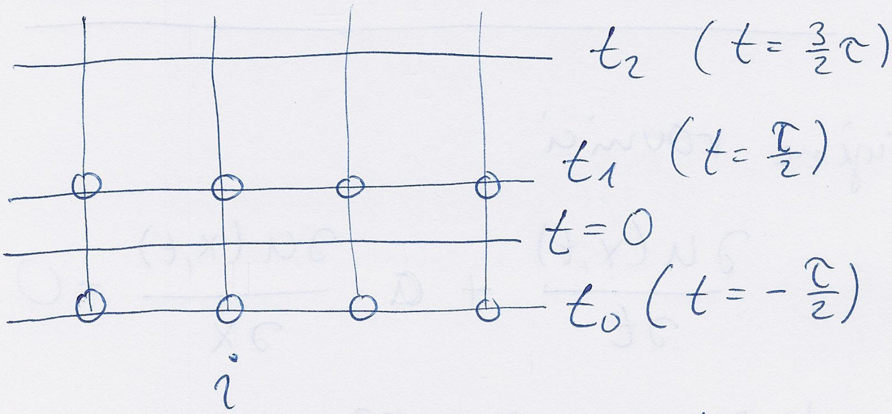
chyba 1 kroku $\Rightarrow$ 2. řád přesnosti pro určení u_i^1

Ze zadané rovnice víme, že

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_i^0} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_i^0 + f_i^0 = \boxed{c^2 u_0''(x_i) + f_i^0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u_i^1 = u_i^0 + \tau v_0(x_i) + \frac{\tau^2 c^2}{2} u_0''(x_i) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0}$$

b) definujeme síť posunutou o $\frac{\tau}{2}$ ve směru t, tj.



víme, že $$v_0(x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x=x_i) = \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} + O(\tau^2)$$

$$u_0(x_i) = u(t=0, x=x_i) = \frac{u_i^1 + u_i^0}{2} + O(\tau^2)$$

$\Rightarrow$ řešíme soustavu
$$u_i^1 - u_i^0 = \tau v_0(x_i)$$
$$u_i^1 + u_i^0 = 2u_0(x_i)$$

⋮

1D transportní rovnice (nebo také rovnice konvekce nebo advekce)

Uvažujme rovnici

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

pro $\forall\,[x,t] \in G \subset \mathbb{R}^2$

Pozn: Tato rovnice popisuje transport veličiny u ve směru x konstantní rychlostí a.

Pro tuto rovnici opět zavádíme 2 typy úloh:

1) počáteční úlohu, kde $G = (-\infty, \infty) \times (0,T)$, $T > 0$ s počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

2) smíšenou úlohu, kde $G = (a,b) \times (0,T)$, $T > 0$ s počáteční podmínkou

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \langle a,b \rangle$$

a okrajovou podmínkou

pro $c > 0$ $\quad u(a,t) = \alpha(t)$, $t \geq 0$

$c < 0$ $\quad u(b,t) = \beta(t)$, $t \geq 0$

Musí být splněny podmínka souhlasu

pro $c > 0$ $\quad u_0(a) = \alpha(0)$

$c < 0$ $\quad u_0(b) = \beta(0)$

Poznámka: Počáteční úloha má analytické řešení $u(x,t) = u_0(x - ct)$

Řešení metodou sítí

Uvažujeme počáteční úlohu a síť s konst. h a τ s $x_i = i \cdot h$, kde h a τ jsou
$t_n = n \cdot \tau$
prostorový a časový krok.

Uvedeme si zde některá základní schémata:

centrální schéma:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0$$

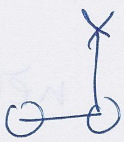
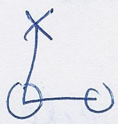
schéma 2. řádu v prostoru a 1. řádu v čase, je však vždy nestabilní (tzv. nepodmíněně nestabilní)

upwind schéma

pro $c > 0$
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\,\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

pro $c < 0$
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0$$

schéma 1. řádu přesnosti v prostoru i čase, je stabilní pro $\frac{|c|\,\tau}{h} \le 1$

"stencil" je $c > 0$  $c < 0$ 

Laxovo-Friedrichsovo schéma

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{c\tau}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

je to schéma s chybou aproximace $O\left(\tau + \frac{h^2}{\tau}\right)$, tj. je-li $h \approx \tau$, jedná se o schéma 1. řádu přesnosti v obou proměnných, schéma je stabilní pro $\frac{|c|\tau}{h} \leq 1$

Rovnice konvekce, difúze a reakce (advection-diffusion-reaction equation)

Rovnice $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t,u)$ modeluje "produkci"

rovnice $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ modeluje difuzi nebo dissipaci

rovnice $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$ popisuje transport sloučením těchto rovnic získáme tzv.

"advection - diffusion - reaction equation"

$$\text{(ADR)} \quad \underbrace{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u)}$$

což je "základní" rovnice např. pro popis proudění tekutiny

Pozn.: Rovnice (ADR) může např. popisovat koncentraci paliva u ve směsi paliva a okysličovadla v 1D potrubí, kde c je rychlost směsi v potrubí, ν je koeficient difuze paliva ve směsi a funkce $f(x,t,u)$ může popisovat změnu koncentrace u např. v důsledku hoření.

Pozn.: Laxovo - Friedrichsovo schéma pro rovnici $\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ lze zapsat také jako

(109)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\tau}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = \frac{h^2}{2\tau}\,\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

což odpovídá řešení PDR ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

koef. difuze

Říkáme, že L-F schéma je centrální schéma s umělou disipací danou členem $\frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, který má stabilizační efekt (porovnej s centrálním schématem).

Metoda sítí pro parciální diferenciální rovnice evolučního typu

Uvažujeme PDR ve tvaru $Au = f$, kde A je diferenciální operátor a počáteční a okrajové podmínky ve formě $Bu = \Phi$.

Nechť funkce u^* je teoreticky přesné řešení, tj. určitě platí

$$Au^* = f \qquad (1)$$
$$Bu^* = \Phi$$

Řešení u^* budeme aproximovat pomocí diskrétních hodnot u_h v uzlech sítě.

Nechť A_h je diskrétní operátor odpovídající operátoru A a B_h odpovídá B. Pak numerickou metodu můžeme zapsat ve formě

$$A_h u_h = f_h \qquad (2)$$
$$B_h u_h = \Phi_h$$

Předpokládáme, že existuje 1! řešení (1) spojitě závislé na parametrech úlohy (f_i na f a Φ) a že (2) je jednoznačně řešitelná soustava rovnic. Pak definujeme následující pojmy:

1) Konzistence, řád aproximace

Lokální chybu aproximace $\mathcal{T}_h$ určíme "dosazením" u^* do vzorečku numerické metody, tj.

$$\mathcal{T}_h = A_h u^* - f_h$$

resp. $\mathcal{T}_h = B_h u^* - \Phi_h$ pro poč. a okraj. p.

Metoda (2) je konzistentní s úlohou (1), platí-li $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \|\mathcal{T}_h\| = 0$

kde h je charakteristický rozměr sítě.

112

Říkáme, že metoda (2) je p-tého řádu, platí-li $\|x_h\| = O(h^p)$ pro $\|h\| \to 0$

2) Konvergence

Numerická metoda (2) je konvergentní, platí-li
$$\lim_{\|h\| \to 0} \|u^* - u_h\| = 0.$$

Př: Určete řád aproximace explicitní metody pro rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$.

expl. m má vzorec

$$(*)\quad u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau c^2}{h^2}\left(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n\right) + \tau f_i^n$$

všechny hodnoty v $(*)$, které nejsou v bodě $[x_i, t_n]$ nahradíme Taylorovými rozvoji v $[x_i, t_n]$, tj.

(113)

$$u_{i\pm1}^{n} = u_i^n \pm \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_i^n \cdot h + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_i^n \cdot \frac{h^2}{2} \pm$$

$$\pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_i^n \frac{h^3}{6} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_i^n \frac{h^4}{24} + O(h^5)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_i^n \tau + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_i^n \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3)$$

---

rozvoje dosadíme do (*)

$$u_i^n + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) = u_i^n + \frac{\tau c^2}{h^2}\Big(h^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^6)\Big) + \tau f_i^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c^2 h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4) + f$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f}_{\text{zadaná rovnice}} + \underbrace{\frac{c^2 h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2 + h^4)}_{\mathcal{X}_h \;\dots\; \text{chyba aproximace}}$$

vidíme, že $\mathcal{X}_h = O(\tau + h^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ explicitní metoda je 2. řádu v prostorové a 1. řádu v časové proměnné.

<u>Pozn:</u> Diskrétní analogie norem pro spojité funkce:

je-li $u(x)$ spojitá funkce, pak užíváme tyto normy

L_∞ : $\|u\|_C = \max_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$

L_1 : $\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| \, dx$

L_2 : $\|u\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx \right]^{1/2}$

těmto normám odpovídají následující diskrétní analogie

$$\|u^n\|_C = \max_i |u_i^n|$$

$$\|u^n\|_1 = h \cdot \sum_i |u_i^n|$$

$$\|u^n\|_2 = h \cdot \left(\sum_i (u_i^n)^2 \right)^{1/2}$$

3) <u>Stabilita:</u> Uvažujeme úlohu pro PDR ve tvaru (1) tj.

$$Au^* = f$$
$$Bu^* = \Phi$$

, kde u^* je teoreticky přesné řešení. Úlohu (1) aproximujeme pomocí diskrétní úlohy (diferenční) úlohy

(2)
$$A_h u_h = f_h$$
$$B_h u_h = \Phi_h$$

<u>Def:</u> Diferenční úloha (2) je stabilní, je-li jednoznačně řešitelná a platí-li, že pro $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h < h_0$ platí

$$\left[\| f_h - \tilde{f}_h \| < \delta \text{ a } \| \Phi_h - \tilde{\Phi}_h \| < \delta \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow \| \tilde{u}_h - u_h \| < \varepsilon \right],$$

kde $\tilde{u}_h$ je řešení modifikované úlohy (úlohy s poruchou)

$$A_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$
$$B_h \tilde{u}_h = \tilde{\Phi}_h .$$

Pozn: Toto byla obecná definice stability, která zahrnuje aproximaci funkce f i okrajových podmínek. Podobně je možné definovat i lokální chybu aproximace jako

$$\chi_h = \begin{cases} A_h u^* - f_h \\ B_h u^* - \Phi_h \end{cases}$$

Vidíme, že řád metody je dán jako $\min(p, q)$, kde p je řád aproximace PDR a q je řád aproximace okraj. a poč. podmínek.