(47)

Stabilita (LVM)

Kvůli většímu počtu startovacích hodnot musíme zavést nové definice pro konvergenci a stabilitu pro (LVM) v porovnání s jednokrokovou metodou.

Definice: (Konvergence (LVM))

(LVM) konverguje, platí-li $\lim_{h\to 0} u^n = u^*(t_n)$

pro libovolné $t_n \in \langle t_0, t_0+T\rangle$, kde u^n

je výsledek (LVM) se startovacími hodnotami

$u^k = c\omega^k, \; k=0,1,\dots,p$, pro které platí

$\lim_{h\to 0} c\omega^k = u(t_0) = u_0$ pro $k=0,1,\dots,p$

Definice: (Ljapunovská stabilita)

(LVM) je stabilní, existují-li $h_0>0$, $C>0$ taková, že pro každé $h \in (0, h_0\rangle$ platí

$|v^n - u^n| \leq C\cdot\varepsilon$ pro libovolné n,

48

kde u^n a v^n jsou řešení úloh

$$\begin{cases} u^{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u^{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, u^{n-j}), \\ u^k = \omega^k, \; k = 0, 1, \dots, p \end{cases}$$

a

$$\begin{cases} v^{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j v^{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, v^{n-j}) + h\delta_{n+1} \\ v^k = \omega^k + \delta_k, \; k = 0, 1, \dots, p \end{cases}$$

kde $|\delta_k| < \varepsilon$ pro každé k a ω^k jsou generovány jinou numerickou metodou.

(49) Kritérium pro posouzení stability (LVM)

Zavedeme testovací úlohu s $f(t,u)=0$, tj.

$$u'(t)=0\ ,\quad u(t_0)=u_0$$

(která má řešení $u(t)=u_0$). Do startovacích hodnot vneseme chybu a budeme testovat konvergenci metody ke konstantnímu řešení.

(LVM) pro $f=0$ má tvar

$$u^{n+1}-\sum_{j=0}^{p} a_j u^{n-j}=0 \qquad (i)$$

Předpokládejme, že řešení rovnice (i) lze vyjádřit jako $u^n=\xi^{n}$ ~ mocnina.

Po dosazení

$$\xi^{n+1}-\sum_{j=0}^{p} a_j \xi^{n-j}=0 \quad \Big|\cdot \xi^{p-n}$$

$$\underbrace{\xi^{p+1}-\sum_{j=0}^{p} a_j \xi^{p-j}}_{=\rho(\xi)}=0 \qquad (ii)$$

(50)

Uvažujme, že rovnice (ii) má $p+1$ kořenů $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1}$. Rovnice (i) je lineární $\Rightarrow$ jejím řešením je libovolná lineární kombinace řešení, tj. lze psát řešení (i) ve tvaru

$$u^n = c_1 \xi_1^n + c_2 \xi_2^n + \dots + c_{p+1} \xi_{p+1}^n ,$$

kde konstanty $c_1, c_2, \dots, c_{p+1}$ určíme pomocí startovacích hodnot $u^0, u^1, \dots, u^p$ jako řešení soustavy:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{p+1} = u^0$$

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{p+1} \xi_{p+1} = u^1$$

$$\vdots$$

$$c_1 \xi_1^p + c_2 \xi_2^p + \dots + c_{p+1} \xi_{p+1}^p = u^p$$

51

Př: Uvažujme (LVM) ve tvaru

$$u^{n+1} - 3u^n + 2u^{n-1} = -h f_{n-1}$$

Ověření konzistence

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1 - 3 + 2 = 0 \\ c_1 &= 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot(-2) + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ metoda je konzistentní

ověření stability

$$\rho(\xi) = \xi^2 - 3\xi + 2 = (\xi - 1)(\xi - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 2$$

$\Rightarrow$ řešení homogenní rovnice $u'(t) = 0$ získané touto (LVM) lze psát jako

$$u^n = c_1 + c_2 2^n \longrightarrow \infty \text{ pro } n \to \infty$$

problém!

52

Zvolíme-li $u^0 = u^1 = 0$, pak $u^n = 0$ a vše je v pořádku. Vneseme-li však do startovacích hodnot malou chybu, tj.

$u^0 = 0$, $u^1 = h$ (všimněte si, že platí

$\lim_{h \to 0} u^1 = 0$), pak

h	n	$u^n = u(t=1)$
1/5	5	4,2
1/10	10	258,4
1/20	20	1954408

$\Rightarrow$ daná metoda není konvergentní.

Pozn: Má-li rovnice $\rho(\xi) = 0$ dvojnásobný kořen ξ_1, pak se

$$u^n = c_1 \xi_1^n + c_2 \cdot n \cdot \xi_1^n + c_3 \xi_3^n + \dots$$

Analogicky řešíme vyšší násobnosti

53

<u>Def:</u> (LVM) je stabilní podle Dahlquista (D-stabilní), pokud kořeny $\xi_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, p+1$ rovnice $\rho(\xi) = 0$ splňují tyto podmínky:

1) $|\xi_k| \leq 1$

2) je-li $|\xi_k| = 1$, pak je ξ_k pouze jednoduchý kořen (tj. $\rho'(\xi_k) \neq 0$)

<u>Pozn:</u> Pro (LVM)

$$u^{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j u^{n-j} = h \sum_{j=-1}^{p} b_j f^{n-j}$$

se zavádí charakteristický polynom také pro pravou stranu, tj.

$$\sigma(\xi) = \sum_{j=0}^{p} b_j \xi^{p-j} + b_{-1} \xi^{p+1}$$

<u>Podmínky konzistence (LVM)</u> lze pak zapsat ve tvaru $\underline{\rho(1) = 0}$ a $\underline{\rho'(1) = \sigma(1)}$.

Z rovnice $\rho(1) = 0$ vyplývá, že konzistentní metoda má vždy jeden kořen rovnice $\rho(\xi) = 0$ roven 1.

<u>Věta:</u> Pro konzistentní (LVM) jsou podmínky Ljapunovské stability a D-stability ekvivalentní.

<u>Věta:</u> Konzistentní (LVM) konverguje právě tehdy, je-li stabilní (Ljapunov nebo Dahlquist) a chyba ve startovacích hodnotách jde k nule pro $h \to 0$.

Absolutní stabilita

Z rozboru vlivu zaokrouhlovací chyby víme, že pro praktickou realizaci výpočtu nelze zajistit $h \to 0$, což je předpoklad Ljapunovské stability, ale potřebujeme znát maximální možné h, aby numerická metoda zůstala stabilní, tj. aby globální chyba byla $O(h^p)$, kde p je řád metody. Budeme uvažovat testovací úlohu

$$\underline{u'(t) = \lambda u(t), \quad u(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}},$$

která má analytické řešení

$$u^*(t) = e^{\lambda t} = e^{Re\lambda t} \cdot (\cos(Im\lambda t) +$$

$$+ i \sin(Im\lambda \cdot t))$$

vidíme, že pro $Re\lambda < 0$ je $\lim_{t\to\infty} u^*(t) = 0$

Definujeme testovací úlohu:

$$(T) \quad u'(t) = \lambda u, \; \lambda \in \mathbb{C}, \; Re\lambda < 0, \; u(0) = 1$$

Definice: Numerická metoda aproximující úlohu (T) je absolutně stabilní, platí-li

$$\lim_{t_n\to\infty} |u_n| = 0$$

Př.: Určete podmínky pro absolutní stabilitu Eulerovy metody.

Eulerova metoda: $u^{n+1} = u^n + h f_n$,

kde $f_n = \lambda u^n$

$$\Rightarrow \underline{u^{n+1}} = (1+\lambda h) u^n = (1+\lambda h)^2 u^{n-1} = \dots$$

$$\dots = \underline{(1+\lambda h)^{n+1} u^0}$$

$$\lim_{n\to\infty} u^{n+1} = 0 \iff \underline{\underline{|1+\lambda h|<1}}$$

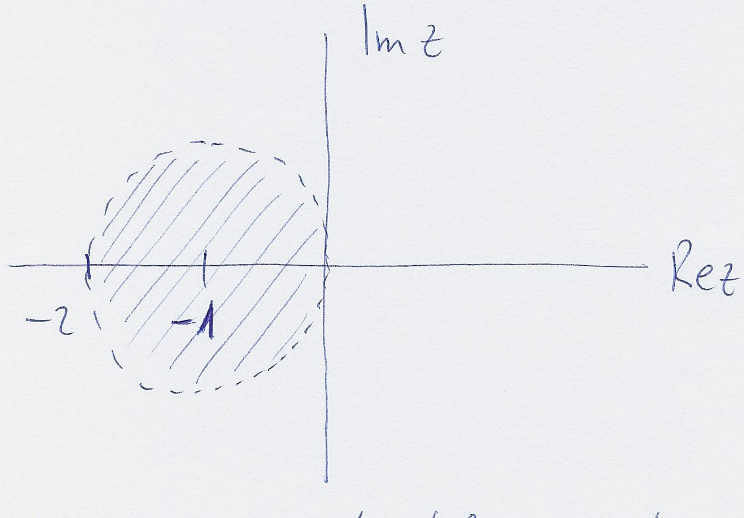
Eulerova metoda je absolutně stabilní jestliže $|1+\lambda h|<1$.

<u>Definice:</u> <u>Oblast absolutní stability</u> numerické metody je množina

$$\Omega_a = \{ z \in \mathbb{C};\ z=\lambda \cdot h,\ |u^n| \to 0 \text{ pro } t_n \to \infty \}$$

<u>Pozn.</u> Pro Eulerovu metodu musí platit
$|1+\lambda h|<1$ tj. $|1+z|<1$

$\rightarrow |z-(-1)|<1$



Je-li λ reálné číslo, pak

$$-2 < \lambda h < 0 \ \Big|\cdot \frac{1}{\lambda},\ \lambda<0$$

57

$$-\frac{2}{\lambda} > h > 0$$

tj: $\underline{h \in \left(0; -\frac{2}{\lambda}\right)}$

Př.: Určete oblast absolutní stability zpětné (implicitní) Eulerovy metody.

zpětná E. m.: $u^{n+1} = u^n + h f_{n+1}$, kde

$$f_{n+1} = \lambda u^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad (1 - \lambda h) u^{n+1} = u^n$$

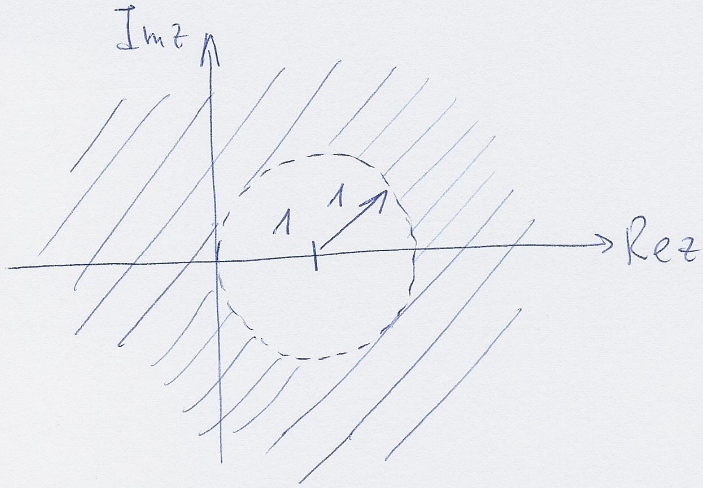
$$u^{n+1} = \frac{u^n}{(1-\lambda h)} = \frac{u^{n-1}}{(1-\lambda h)^2} = \dots =$$

$$= \underline{\frac{u^0}{(1-\lambda h)^{n+1}}}$$

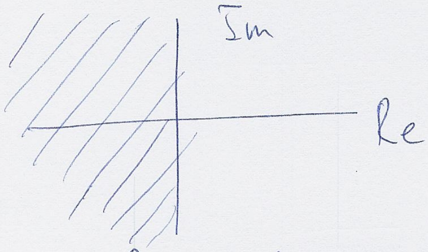
$$\lim_{n\to\infty} u^{n+1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |1 - \underbrace{\lambda h}_{=z}| > 1$$

$$|1 - z| > 1$$

$$|z - 1| > 1$$



Def.: Numerická metoda je tzv. <u>A stabilní</u> (nepodmíněně absolutně stabilní), je-li $\Omega_a \cap C^- = C^-$, kde C^- je "levá komplexní polorovina"



Neboli obsahuje-li Ω_a celou C^-.

Je-li $\Omega_a \cap C^- \neq C^-$, pak říkáme, že numerická metoda je <u>podmíněně absolutně stabilní</u> (tj. maximální hodnota h závisí na λ).