(33)

Metody Taylorova typu

Uvažujme CÚ $u'(t) = f(t,u)$, $u(t_0)=u_0$.

Za předpokladu existence $(p+1)$ derivace funkce $u(t)$ lze psát Taylorův rozvoj

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + u'(t_n)\cdot h + u''(t_n)\cdot \frac{h^2}{2} + \dots$$

$$+ \dots + u^{(p)}(t_n)\frac{h^p}{p!} + \underbrace{u^{(p+1)}(\xi_n)\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}}_{=O(h^{p+1})}\,,$$

kde ξ_n leží mezi t_n a t_{n+1} $\quad = O(h^{p+1})$ ... chyba 1 kroku $\Downarrow$ řád p

víme, že $u'(t) = f(t,u(t))$

tj. můžeme psát

$$u''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=u'} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot f$$

$$u'''(t) = \dots$$

$$\vdots$$

tj. derivace $u'', u''', \dots, u^{(p)}$ získáme postupným derivováním funkce $f(t,u)$.

34

Pozn.: Tímto postupem získáme metodu libovolného řádu aproximace p. Je zde však nevýhoda nutnosti počítat derivace funkce f.

Rungovy-Kuttovy metody

Zavádíme metodu typu

$$u^{n+1} = u^n + h \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k_i \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

kde

$$k_1 = f(t_n, u^n)$$

$$k_2 = f(t_n + \lambda_2 h, u^n + \mu_2 h k_1)$$

$$\vdots$$

Př.: Ukázka odvození koeficientů dvoustupňové $(r=2)$ Rungovy-Kuttovy metody.

(35)

Obecná 2-stupňová RK metoda má tvar

$$u^{n+1} = u^n + h\,(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_n, u^n)$$

$$k_2 = f(t_n + \lambda_2 h,\ u^n + \mu_2 h k_1)$$

Tuto metodu zapíšeme ve tvaru jednokrokové metody $u^{n+1} = u^n + h\,\Phi(t_n, u^n, f_n, h)$, kde

$$\Phi(\dots) = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = \alpha_1 f(t_n, u^n) +$$

$$+ \alpha_2 f(t_n + \lambda_2 h,\ u^n + \mu_2 h k_1) = \alpha_1 f(t_n, u^n) +$$

$$+ \alpha_2 f(t_n, u^n) + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u^n)\cdot \lambda_2 h +$$

$$+ \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u^n)\cdot \mu_2 h k_1 + O(h^2)$$

$k_1 = f(t_n, u^n)$

36

Koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_2, \mu_2$ získáme z porovnání s Taylorovou metodou 2. řádu, tj.

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + h\,u'(t_n) + \frac{h^2}{2} u''(t_n) + \underline{\underline{O(h^3)}}$$

chyba 1 kroku $\Rightarrow$ 2. řád

kde $\quad u' = f$

$$u'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot f$$

takže $\quad u(t_{n+1}) = u(t_n) + h \cdot \varphi_n$

kde $\varphi_n = f(t_n, u(t_n)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u(t_n)) +$

$$+ \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u(t_n)) \cdot f(t_n, u(t_n)) + O(h^2)$$

(φ_n se někdy nazývá přesná přírůstková funkce)

z porovnání $\Phi(\dots)$ a φ_n dostáváme

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 \lambda_2 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_2 \mu_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

tato soustava má ∞ mnoho řešení, volíme např. α_1 a zbytek dopočítáme

α_1	α_2	λ_2	μ_2	
0	1	$1/2$	$1/2$	1. modifikace Eulerovy metody
$1/2$	$1/2$	1	1	Heunova metoda

Pozn.! Dvoustupňová RK metoda je metoda 2. řádu (protože chyba 1 kroku je $O(h^3)$).

Vícekrokové metody

Stále řešíme CÚ $u'(t) = f(t, u)$
$u(t_0) = u_0$.

Ve vzorečku vícekrokové metody počítáme "novou" hodnotu řešení u^{n+1} pomocí několika předchozích hodnot $u^n, u^{n-1}, u^{n-2}, \dots, u^{n-k}$.

Principy odvození metod

1) integrace
$$\int_{t_{n-k}}^{t_{n+1}} u'(t)\,dt = \int_{t_{n-k}}^{t_{n+1}} f(t,u)\,dt$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_{n-k}) + \int_{t_{n-k}}^{t_{n+1}} f(t,u)\,dt,$$

kde $f(t,u)$ pro $t \in \langle t_{n-k}, t_{n+1} \rangle$ nahradíme interpolačním polynomem a ten integrujeme

2) <u>derivování</u>

$u(t)$ pro $t \in \langle t_{n-k}, t_{n+1} \rangle$ nahradíme interpolačním polynomem, ten zderivujeme a dosadíme do rovnice $u'(t) = f(t,u)$

<u>Př.:</u> Ukázka odvození 2-krokové explicitní metody (tzv. Adamsovy-Bashfordovy 2-krokové metody) pomocí integrování

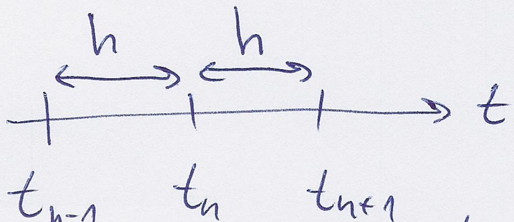
funkci $f(t,u)$ nahradíme pro $t \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$ lineární funkcí

$$f(t,u) = f_n \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f_{n-1} \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} + O(h^2)$$

chyba je o řád vyšší než stupeň polynomu

kde $f_n = f(t_n, u(t_n))$

$f_{n-1} = \dots$



(tj. použili jsme lineární extrapolaci)

40

jednoduchou úpravou získáme

$$f(t,u) = \underbrace{\left(\frac{f_n}{h} - \frac{f_{n-1}}{h}\right)}_{=a} \cdot t + \underbrace{\left(-\frac{f_n t_{n-1}}{h} + \frac{f_{n-1} t_n}{h}\right)}_{=b} +$$

$$+ O(h^2) = \underline{a t + b + O(h^2)}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{(at + b + O(h^2))}_{= f(t,u)} dt$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \left[a\frac{t^2}{2} + bt + O(h^2)\cdot t\right]_{t_n}^{t_{n+1}} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(t_{n+1}^2 - t_n^2\right) + b\left(t_{n+1} - t_n\right) + \underline{O(h^3)}$$

$\approx$ chyba 1 kroku

$\Rightarrow$ metoda 2. řádu

dosadíme a a b a budeme značit

$$u^n = u(t_n)$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1})(t_{n+1} + t_n) -$$

$$- f_n t_{n-1} + f_{n-1} t_n =$$

$$= u^n + f_n\left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2} - t_{n-1}\right) + f_{n-1}\left(-\frac{t_{n+1} + t_n}{2} + \right.$$

$$\left. + t_n\right) = u^n + f_n \frac{3h}{2} + f_{n-1}\left(-\frac{h}{2}\right) =$$

41

$$= \frac{h}{2}\left(3f_n - f_{n-1}\right)$$

<u>Pozn:</u> Vzorečky dalších Adamsových-Bashfordových (A-B) metod:

2 kroková $\quad u^{n+1} = u^n + \frac{h}{2}\left(3f_n - f_{n-1}\right)$

3 kroková $\quad u^{n+1} = u^n + \frac{h}{12}\left(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right)$

4 kroková $\quad u^{n+1} = u^n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)$

$\vdots$

obecně platí, že q-kroková A-B metoda je q-tého řádu

<u>Pozn:</u> použijeme-li pro interpolaci $f(t,u)$ i hodnotu f_{n+1}, získáme implicitní metodu, tzv. Adamsovu-Moultonovu metodu

2 kroková $\quad u^{n+1} = u^n + \frac{h}{12}\left(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\right)$

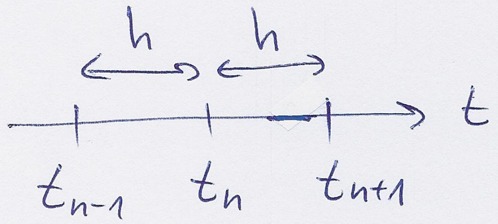
3 kroková $\quad u^{n+1} = u^n + \frac{h}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right)$

$\vdots$

obecně platí, že q-kroková A-M metoda má řád $(q+1)$.

<u>Př:</u> Ukázka odvození 2-krokové implicitní metody pomocí derivování

$u(t)$ pro $t \in \langle t_{n-1}, t_{n+1} \rangle$ budeme interpolovat pomocí kvadratického polynomu



$$u(t) = u^{n+1} \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}-t_{n-1})} + u^n \frac{(t-t_{n+1})(t-t_{n-1})}{(t_n-t_{n+1})(t_n-t_{n-1})} + u^{n-1} \frac{(t-t_{n+1})(t-t_n)}{(t_{n-1}-t_{n+1})(t_{n-1}-t_n)} + O(h^3)$$

43

po jednoduché úpravě získáme

$$u(t) = \frac{u^{n+1}}{2h^2}\left(t^2 - t(t_n + t_{n-1}) + t_n t_{n-1}\right) +$$

$$+ \frac{u^n}{-h^2}\left(t^2 - t(t_{n+1} + t_{n-1}) + t_{n+1} t_{n-1}\right) +$$

$$+ \frac{u^{n-1}}{2h^2}\left(t^2 - t(t_{n+1} + t_n) + t_{n+1} t_n\right) + O(h^3)$$

a po zderivování

$$u'(t) = \frac{u^{n+1}}{2h^2}\left(2t - t_n - t_{n-1}\right) -$$

$$- \frac{u^n}{h^2}\left(2t - t_{n+1} - t_{n-1}\right) +$$

$$+ \frac{u^{n-1}}{2h^2}\left(2t - t_{n+1} - t_n\right) + O(h^2)$$

rovnici $u' = f$ uvažujeme pro $t = t_{n+1}$, tj.

$$u'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$$

$$u'(t_{n+1}) = \frac{u^{n+1}}{2h^2} 3h - \frac{u^n}{h^2} 2h + \frac{u^{n-1}}{2h^2} \cdot h + O(h^2) =$$

(44)

$$= \frac{3u^{n+1} - 4u^{n} + u^{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3u^{n+1} - 4u^{n} + u^{n-1}}{2h} = f_{n+1}$$

(tuto metodu řadíme k tzv. BDF metodám, tj. "Backward Differencing Formulae" metodám)

BDF 2-krokovou metodu často píšeme jako

$$3u^{n+1} - 4u^{n} + u^{n-1} = 2h\, f_{n+1}$$

<u>Pozn.</u> "Sečteme-li" vzorečky vícekrokové metody vzniklé integrací a derivováním, dostaneme <u>obecnou lineární vícekrokovou metodu</u>

(LVM)

$$u^{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u^{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_{n-j}, \quad n = p, p+1, \dots$$

(45)

Lokální chyba aproximace (LVM)

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}\Big[u^*(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{p} a_j u^*(t_{n-j}) - $$
$$- h \sum_{j=-1}^{p} b_j \underbrace{u^{*\prime}}_{=f}(t_{n-j})\Big]$$

kde $u^*(t_{n-j}) = u^*(t_n - j\cdot h) =$

$= u^*(t_n) - j\cdot h\, u^{*\prime}(t_n) + O(h^2)$

po dosazení

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}\Big[u^*(t_n) + h u^{*\prime}(t_n) - \sum_{j=0}^{p} a_j u^*(t_n) +$$
$$+ h \sum_{j=0}^{p} a_j \cdot j\, u^{*\prime}(t_n) - h \sum_{j=-1}^{p} b_j u^{*\prime}(t_n) + O(h^2)\Big]$$

protože

$u^{*\prime}(t_{n-j}) = u^{*\prime}(t_n) + O(h)$

46

$$\tau_{n+1} = \frac{u^*(t_n)}{h} \underbrace{\left(1 - \sum_{j=0}^{p} a_j\right)}_{C_0} +$$

$$+ \; u^{*\prime}(t_n) \cdot \underbrace{\left[1 + \sum_{j=0}^{p} j \cdot a_j - \sum_{j=-1}^{p} b_j\right]}_{C_1} + O(h)$$

Aby (LVM) byla konzistentní, musí

$\lim\limits_{h \to 0} \tau_{n+1} = 0$. To platí pro $C_0 = C_1 = 0$.

$\Rightarrow$ Podmínka konzistence (LVM) je $\underline{\underline{C_0 = C_1 = 0.}}$

<u>Pozn:</u> "Rozepíšeme-li více" Taylorovy rozvoje pro $u^*(t_{n-j})$ a $u^{*\prime}(t_{n-j})$ je možné definovat

$$\underline{C_q = 1 - \sum_{j=0}^{p} (-j)^q a_j - q \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{q-1} b_j} \, ,$$

kde $q = 2, 3, \ldots$

(LVM) je q-tého řádu, platí-li

$$C_0 = C_1 = C_2 = \cdots = C_q = 0.$$