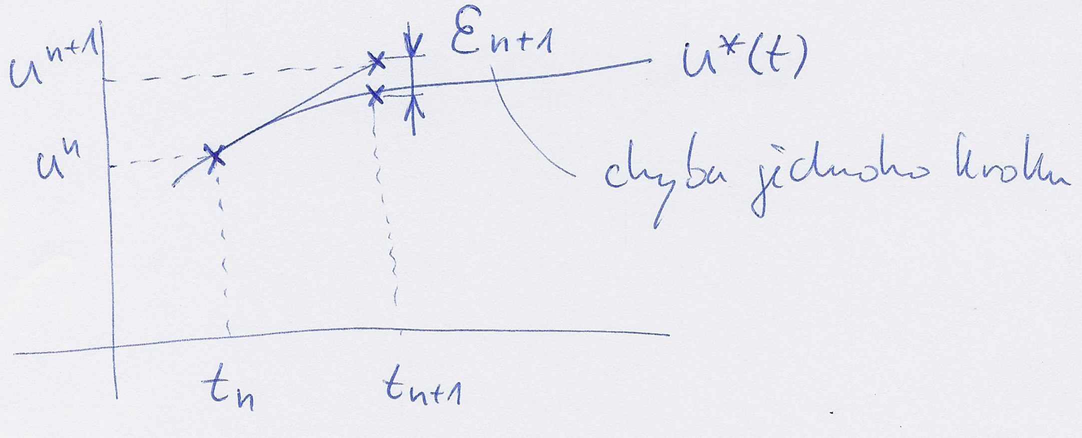
Analýza vlastností numerických metod

Uvažujeme CÚ $u'(t) = f(t,u)$, $u(t_0) = u^0$.
Symbolem $u^*(t)$ označíme přesné řešení tého CÚ. Dále uvažujme obecnou jednokrokovou metodu ve tvaru

$$u^{n+1} = u^n + h\,\Phi(t_n, u^n, f_n, h),$$

kde $\Phi(\cdots)$ je tzv. přírůstková funkce.

Uvažujme, že $u^n = u^*(t_n)$



Zavádíme chybu jednoho kroku jako

$$\varepsilon_{n+1} = u^*(t_{n+1}) - u^{n+1}$$

(též lokální chyba)

(14)

Zjevně platí

$$u^{n+1} = u^n + h\,\Phi(t_n, u^n, f_n, h)$$

$$u^*(t_{n+1}) = u^*(t_n) + h\,\Phi(t_n, u^*(t_n), f_n, h) + \mathcal{E}_{n+1}$$

Pozn.: $\mathcal{E}_{n+1}$ lze vypočítat z poslední rovnice, dosadíme-li za $u^*(t_{n+1})$ Taylorův rozvoj $u^*(t_{n+1}) = u^*(t_n) + \dots$

Př.: Určete lokální chybu Leapfrog metody

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2h f_n$$

tj.

$$u^*(t_{n+1}) = u^*(t_{n-1}) + 2h\, f(t_n, u^*(t_n)) + \mathcal{E}_{n+1}$$

kde

$$u^*(t_{n\pm 1}) = u^*(t_n) \pm h\, u^{*\prime}(t_n) + \frac{h^2}{2} u^{*\prime\prime}(t_n) \pm$$

$$\pm \frac{h^3}{6} u^{*\prime\prime\prime}(t_n) + O(h^4)$$

po dosazení dostáváme

$$\cancel{u^*(t_n)} + \cancel{h u^{*\prime}(t_n)} + \frac{h^2}{2}\cancel{u^{*\prime\prime}(t_n)} + \frac{h^3}{6} u^{*\prime\prime\prime}(t_n) =$$

$$= \cancel{u^*(t_n)} - \cancel{h u^{*\prime}(t_n)} + \frac{h^2}{2}\cancel{u^{*\prime\prime}(t_n)} - \frac{h^3}{6} u^{*\prime\prime\prime}(t_n) +$$

$$+ \cancel{2hf(t_n, u^*(t_n))} + \varepsilon_{n+1} + O(h^4)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{n+1} = \underbrace{\frac{h^3}{3} u^{*\prime\prime\prime}(t_n)}_{\text{hlavní část chyby}} + O(h^4) = O(h^3)$$

Pozn.: Kromě lokální chyby řešení (resp. chyby jednoho kroku) ε_{n+1} zavádíme také lokální chybu aproximace $\tau_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{h}$

Myšlenka pro zavedení τ_{n+1} je následující

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \Phi(t_n, u^n, f_n, h)$$

16

$$\underbrace{\frac{u^*(t_{n+1}) - u^*(t_n)}{h}}_{\sim u'} = \underbrace{\Phi(\cdots)}_{\sim f} + \tau_{n+1}$$

τ_{n+1} → chyba "nesplnění" rovnice $u' = f$

Pozn: tj. u předchozího příkladu je lokální chyba aproximace $O(h^2)$, tj. říkáme, že Leapfrog metoda je metoda 2. řádu.

Definice: 1) Numerická metoda je konzistentní (tj. aproximuje diferenciální rovnici), platí-li $\lim_{h \to 0} \tau_h = 0$, kde $\tau_h = \max_n |\tau_n|$

2) Je-li $\tau_h = O(h^p)$, pak metoda je řádu p.

(17)

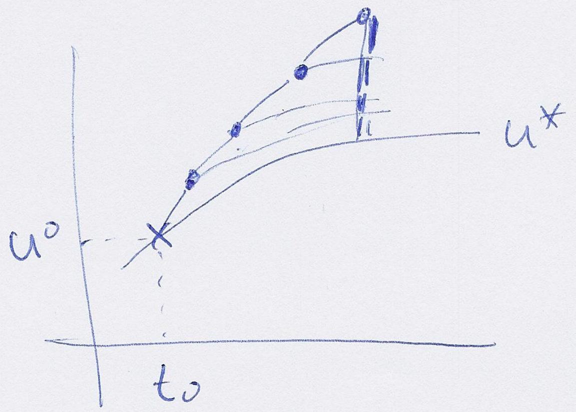
Pozn.: Globální chyba

Uvažujme, že $u^0 = u^*(t_0)$, a že chyba jednoho kroku ε_n je konstantní. Je-li metoda řádu p, pak je $\varepsilon_n = O(h^{p+1})$.

Můžeme psát

$$\underline{u^*(t_n) - u^n} = n \cdot \varepsilon_n = \frac{t_n - t_0}{h} \varepsilon_n = \underline{O(h^p)}$$

$\Longrightarrow$ Je-li metoda řádu p, pak je globální chyba $O(h^p)$, za předpokladu, že se do řešení již zahrnuté lokální chyby nezvětšují (viz stabilita – později)



(18)

Definice: Metoda konverguje, platí-li

$$\lim_{h \to 0} |E_h^n| = 0,$$ kde

$E_h^n = u^n - u^*(t_n)$ je globální chyba při velikosti kroku h a pro $u^0 = u^*(t_0)$.

Pozn: U jednoduchých metod lze konvergenci dokázat přímo. Obvykle však ověříme konzistentnost a stabilitu metody, ze kterých pak vyplývá i konvergence.

(19)

<u>Př:</u> Důkaz konvergence Eulerovy metody pro CÚ $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$.

Eulerova metoda je dána vztahem

$$u^{n+1} = u^n + h \cdot f(t_n, u^n).$$

Nejprve určíme řád metody, tj. do rovnice

$$\frac{u^*(t_{n+1}) - u^*(t_n)}{h} = f(t_n, u^*(t_n)) + \tau_{n+1}$$

dosadíme Taylorův rozvoj

$$u^*(t_{n+1}) = u^*(t_n) + h u^{*\prime}(t_n) + \frac{h^2}{2} u^{*\prime\prime}(t_n) + O(h^3)$$

a dostáváme

$$\underline{\tau_{n+1}} = \cancel{u^{*\prime}(t_n)} + \underline{\frac{h}{2} u^{*\prime\prime}(t_n) + O(h^2)} - \cancel{f(t_n, u^*(t_n))}$$

protože $u' = f$

tj. $\tau_{n+1} = O(h) \Rightarrow$ Eulerova metoda je metoda 1. řádu

20

Víme, že

$$-\left|\begin{array}{l} u^*(t_{n+1}) = u^*(t_n) + h f(t_n, u^*(t_n)) + h\cdot \tau_{n+1} \\ u^{n+1} \quad\;\; = u^n \qquad\; + h f(t_n, u^n \quad\;) \end{array}\right.$$

$$u^{n+1} - u^*(t_{n+1}) = u^n - u^*(t_n) +$$

$$+ h\left[f(t_n, u^n) - f(t_n, u^*(t_n))\right] - h\,\tau_{n+1}$$

Označíme $E^n = u^n - u^*(t_n)$, tj.

$$E^{n+1} = E^n + h\,[\;\text{------}\;] - h\,\tau_{n+1}$$

$$|E^{n+1}| \leq |E^n| + h\,|[\text{---}]| + h\,|\tau_{n+1}|,$$

kde $|[\text{---}]| = |f_n(t_n, u^n) - f(t_n, u^*(t_n))| \leq$

$$\leq L\,|u^n - u^*(t_n)| = L\,|E^n|$$

takže

$$|E^{n+1}| \leq (1+hL)\underbrace{|E^n|}_{\text{"stará" chyba}} + \underbrace{h\,|\tau_{n+1}|}_{\text{"nová" chyba}}$$

21

Pomocí rekurze lze psát

$$\underbrace{|E^{n+1}|} \le (1+hL)|E^n| + h|\tau_{n+1}| \le$$

$$\le (1+hL)\left[(1+hL)|E^{n-1}| + h|\tau_n|\right] + h|\tau_{n+1}| \le$$

$$\le \dots \le \underbrace{(1+hL)^{n+1}|E^0| + h\sum_{j=0}^{n}(1+hL)^j|\tau_{n+1-j}|}$$

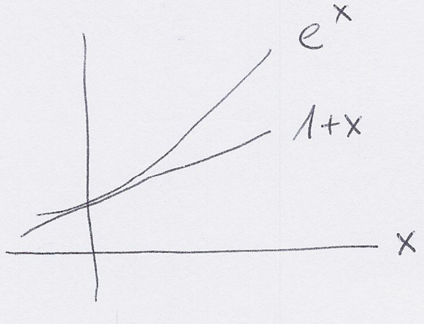
Označíme $\tau = \max_j |\tau_j|$ a uvažujeme, že počáteční podmínka je zadána přesně, tj. že $E^0 = 0$, pak

$$|E^{n+1}| \le \tau h \sum_{j=0}^{n} (1+hL)^j =$$

$$= \tau \cancel{h} \frac{(1+hL)^{n+1}-1}{\cancel{1}+\cancel{h}L \cancel{-1}} = \frac{\tau}{L}\left[(1+hL)^{n+1}-1\right]$$

protože $1+x < e^x$

tak $1+hL < e^{hL}$



22

a můžeme psát

$$|E^{n+1}| \leq \frac{\tau}{L}\left[\left(e^{hL}\right)^{n+1} - 1\right] =$$

$$= \frac{\tau}{L}\left(e^{(n+1)hL} - 1\right) = \frac{\tau}{L}\left(e^{LT} - 1\right),$$

kde $T = (n+1)h = t_{n+1} - t_0$

Víme, že $\tau_{n+1} = \frac{h}{2} u^{*''}(\xi)$, $\xi \in \langle t_n, t_{n+1} \rangle$

(viz MA1 - zbytek v Lagrangeově tvaru)

Budeme uvažovat $\tau \leq \frac{h}{2} M$, kde

$$M = \sup_{\xi \in \langle t_0, t_{n+1} \rangle} u^{*''}(\xi)$$

Pak je možné psát

$$|E^{n+1}| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{LT} - 1\right) = O(h)$$

tj. $\lim_{h \to 0} |E^{n+1}| = 0$, neboli metoda konverguje se stejným řádem jako je řád aproximace.

(23)

Vliv zaokrouhlovací chyby

Uvažujme opět Eulerovu metodu. Diferenční rovnice s přesnou aritmetikou je

$$(a) \quad \begin{aligned} u^0 &= u(t_0) \\ u^{n+1} &= u^n + h f(t_n, u^n) \end{aligned}$$

a diferenční rovnice, která zohledňuje zaokrouhlovací chybu je

$$(b) \quad \begin{aligned} \tilde{u}^0 &= u(t_0) \quad \text{.... stejná poč. pod.} \\ \tilde{u}^{n+1} &= \tilde{u}^n + h f(t_n, \tilde{u}^n) + \xi_{n+1} \end{aligned}$$

Zavedeme $r^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} - u^{n+1}$, pak odečtením (a) a (b) dostáváme rovnici

$$r^{n+1} = r^n + h\left[f(t_n, \tilde{u}^n) - f(t_n, u^n)\right] + \xi_{n+1}$$

a s využitím vlastnosti

$$|f(t_n, \tilde{u}^n) - f(t_n, u^n)| \leq L\,|r^n|$$

24

Můžeme psát

$$|r^{n+1}| \leq |r^n| + hL|r^n| + |\xi_{n+1}|$$

a označíme-li $\xi = \max_n |\xi_n|$, pak

$$|r^{n+1}| \leq (1+Lh)|r^n| + \xi$$

analogicky podle předchozího důkazu konvergence víme, že

$$|r^{n+1}| \leq \xi \sum_{j=0}^{n} (1+hL)^j =$$

$$= \xi \frac{(1+Lh)^{n+1} - 1}{\cancel{1}+Lh-\cancel{1}} = \frac{\xi}{Lh}\left[(1+Lh)^{n+1} - 1\right] \leq$$

$$\leq \frac{\xi}{Lh}\left(e^{LT} - 1\right)$$

(25)

Zahrneme-li do globální chyby i chybu zaokrouhlovací, pak dostáváme

$$\underline{\underline{|\tilde{E}^{n+1}|}} = |\tilde{u}^{n+1} - u^*(t_{n+1})| =$$

$$= |\tilde{u}^{n+1} - u^{n+1} + u^{n+1} - u^*(t_{n+1})| \leq$$

$$\leq |\tilde{u}^{n+1} - u^{n+1}| + |u^{n+1} - u^*(t_{n+1})| =$$

$$= |r^{n+1}| + |E^{n+1}| = \underline{\underline{\left(\frac{\xi}{Lh} + \frac{Mh}{2L}\right)\left(e^{LT} - 1\right)}}$$

Závěr pro Eulerovu metodu:

1) metoda konverguje, protože $|E^{n+1}| \approx O(h)$
2) řád konvergence je stejný s řádem aproximace

26

Stabilita

Zavedeme nejdříve pojem stabilita pro CÚ.

Uvažujeme Cauchyovu úlohu

$$u'(t) = f(t, u) \quad , \; u(t_0) = u_0 \qquad (1)$$

a tzv. modifikovanou úlohu

$$v'(t) = f(t, v) + \delta(t) \, , \qquad (2)$$
$$v(t_0) = u_0 + \delta_0$$

kde $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta(t)$ je spojitá pro $t \in I$

a $|\delta(t)| \leq \varepsilon$.

<u>Definice:</u> Cauchyova úloha (1) je (Ljapunovsky) stabilní v omezeném intervalu I, jestliže pro libovolné dostatečně malé ε existuje $c > 0$ nezávislé na ε, takové, že $|u(t) - v(t)| < c \cdot \varepsilon$ pro každé $t \in I$.

(27)

Pozn: CÚ (1) je stabilní, když "malá" změna poč. podmínky nebo funkce f způsobí "malou" změnu řešení.

Pozn: Lze ukázat, že pokud je $f(t, u)$ stejnoměrně Lipschitzovská v proměnné u pro $t \in I$, pak je CÚ (1) Ljapunovsky stabilní.

Stabilitu u numerických metod definujeme podobně. Uvažujme obecnou explicitní jednokrokovou metodu ve tvaru

(i) $u^{n+1} = u^n + h\,\Phi(t_n, u^n, f_n, h)$, $u^0 = u_0$

a modifikovanou metodu

(ii) $v^{n+1} = v^n + h\left[\Phi(t_n, v^n, f_n, h) + \delta_{n+1}\right]$,

$$v^0 = u_0 + \delta_0$$

a říkáme, že

<u>Definice:</u> Metoda (i) je stabilní v Ljapunovském smyslu (tzv. "zero stability", tj. pro $h \to 0$) jestliže existují takové $h_0 > 0$ a $C > 0$, že pro každé $h \in (0, h_0>$ platí $|v^n - u^n| < C \cdot \varepsilon$ pro každé n, kde $|\delta_k| \leq \varepsilon$ pro každé k.

<u>Pozn:</u> "zero stability" znamená, že "malá" změna funkce Φ nebo "malá" změna poč. podmínky vyvolá pouze "malou" změnu řešení.

<u>Věta:</u> Je-li přírůstková funkce Φ stejnoměrně Lipschitzovská vzhledem k u, tj. existují-li takové $h_0 > 0$ a $\Lambda > 0$, že pro každé $h \in (0, h_0>$ platí

$$|\Phi(t_n, u^n, f(t_n, u^n), h) - \Phi(t_n, v^n, f(t_n, v^n), h)| \leq$$
$$\leq \Lambda |u^n - v^n| \quad \text{pro každé } u^n, v^n,$$

pak je metoda (i) stabilní ve smyslu předchozí definice.

29

Lokální chyba aproximace obecné explicitní jednokrokové metody (i)

Do (i) dosadíme přesné řešení, pak

$$u^*(t_n+h) = u^*(t_n) + h\,\Phi(t_n, u^*(t_n), f(t_n, u^*(t_n)), h) + \\ + h\,\tau_{n+1}$$

tj.

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}\left[u^*(t_n+h) - u^*(t_n) - h\,\Phi(\dots)\right]$$

dosadíme $u^*(t_n+h) = u^*(t_n) + h\,u^{*\prime}(t_n) + O(h^2)$

$$\underline{\tau_{n+1}} = u^{*\prime}(t_n) - \Phi(\dots) + O(h) =$$

$$= f(t_n, u^*(t_n)) - \Phi(\dots) + O(h)$$

Metoda (i) je konzistentní, platí-li

$\lim\limits_{h\to 0} |\tau_{n+1}| = 0$, tj. nutně musí platit

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \Phi(t_n, u^*(t_n), f(t_n, u^*(t_n)), h) = f(t_n, u^*(t_n))}$$

<u>podmínka konzistence metody (i)</u>

30

Věta: Je-li metoda (i) konzistentní a stabilní, pak konverguje se stejným řádem, jako je řád aproximace.

Důkaz:

$$u^{n+1} = u^n + h\,\Phi_n$$
$$-$$
$$u^*(t_{n+1}) = u^*(t_n) + h\,\Phi_n^* + h\,\tau_{n+1}$$

$$|u^*(t_{n+1}) - u^{n+1}| = |u^*(t_n) - u^n + h\,\Phi_n^* - h\,\Phi_n + h\,\tau_{n+1}|$$

kde $\Phi_n = \Phi(t_n, u^n, f(t_n, u^n), h)$

a $\Phi_n^* = \Phi(t_n, u^*(t_n), f(t_n, u^*(t_n)), h)$

dále můžeme psát

$$|u^*(t_{n+1}) - u^{n+1}| \leq |u^*(t_n) - u^n| + h\,|\Phi_n^* - \Phi_n| + h\,|\tau_{n+1}|$$

je-li metoda stabilní, pak víme, že platí

$$|\Phi_n^* - \Phi_n| \leq L\,|u^*(t_n) - u^n|$$

a navíc uvažujme $\tau = \max_n |\tau_n|$

31

pak

$$\underbrace{|u^*(t_{n+1}) - u^{n+1}|}_{=|E^{n+1}|} \leq (1+\Lambda h) \underbrace{|u^*(t_n) - u^n|}_{=|E^n|} + h\tau$$

$$|E^{n+1}| \leq (1+\Lambda h)|E^n| + h\tau$$

uvážíme-li $|E^0| = 0$, pak stejně jako u důkazu konvergence Eulerovy metody dojdeme k nerovnosti

$$|E^{n+1}| \leq \frac{\tau}{\Lambda}\left(e^{\Lambda(t_{n+1}-t_0)} - 1\right) =$$

$$= C \cdot \tau(h)$$

Konzistence metody nám zaručuje, že

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0} |E^{n+1}| = 0 \text{ , tj. že}$$

metoda (i) konverguje

32

Pozn: Výše uvedené úvahy platí pro $h \to 0$. Toto nelze při praktickém použití metody splnit, později budeme hovořit o tzv. absolutní stabilitě pro h konečné velikosti.